5.23 Bsp: gedämpfter harmonischer Oszillator

$n=1$

$$\ddot{x}(t) = -\omega_0^2\, x(t) - 2\gamma\, \dot{x}(t)$$

$0 < \omega_0 =$ Frequenz, $0 < \gamma =$ Stärke der Dämpfung

1 DGL 2. Ord. $\Longleftrightarrow$ 2 Gl.en 1. Ord.

$$v(t) = \dot{x}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v(t) \\ \dot{v}(t) = -\omega_0^2\, x(t) - 2\gamma\, v(t) \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma \end{pmatrix}}_{=:A}\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

a) EWe:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -\lambda(-2\gamma-\lambda) + \omega_0^2$$

$$= \underline{\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2}$$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Fälle: (i) $\gamma > \omega_0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$, $\lambda_{1,2} < 0$.

(ii) $\gamma = \omega_0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \in \mathbb{R}$

(iii) $\gamma < \omega_0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \in \mathbb{C}$

EWe sind komplex, versch., zueinander konj.

b) EVen

$$(A - \lambda_1 E)\, v^{(1)} = 0, \qquad (A - \lambda_2 E)\, v^{(2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -\lambda_i & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\gamma - \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{(i)} \\ v_2^{(i)} \end{pmatrix} = 0$$

$$-\lambda_i v_1^{(i)} + v_2^{(i)} = 0$$

Setze z.B. $v_1^{(i)} = 1$, dann $v_2^{(i)} = \lambda_i$

d.h. $v^{(i)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_i \end{pmatrix}$ im Fall (i) & (iii)

$$\left[\quad S \lambda E S^{-1} = \lambda E \right]$$

Fall (ii): nur 1 EV, A nicht diag.bar bis auf Vielfache

c) Trafo auf Diagonalgestalt

$$D = S^{-1} A S, \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$A = S D S^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} v^{(1)} & v^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

d) Lösungsoperator:

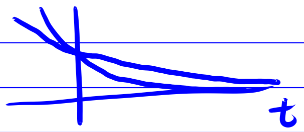
$$e^{At} = S e^{Dt} S^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & \\ & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lsg: $\begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$

$$x(t) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \Big[\left(\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}\right) x(0) + \left(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}\right) v(0) \Big] \qquad (*)$$

Fall (i): $\lambda_1, \lambda_2 < 0$



$$x(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0 .$$

keine Oszillationen, "überdämpfter Fall"

Fall (ii): $(*)$ trifft nicht zu.
andere Methode später

Fall (iii): $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$
$=: -\gamma \pm i\, \omega$

Komplexe e-Fkt:

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \qquad \text{Euler-Formel}$$

Einschub zur e-Fkt.:

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad e^{iy} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(iy)^k}{k!}}_{\frac{i^k y^k}{k!}}$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
i^k	1	i	−1	−i	1	i	−1	−i	1

Also $e^{iy} = \frac{y^0}{0!} + i\frac{y^1}{1!} - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!}$

Terme ohne i: $\frac{y^0}{0!} - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6} + \ldots$

$= \cos y$

Terme mit i: $i\frac{y^1}{1!} - i\frac{y^3}{3!} + i\frac{y^5}{5!} - i\frac{y^7}{7!} + \ldots$

$= i\sin y$

$$e^{\lambda t} = e^{-\gamma t \pm i\omega t} = e^{-\gamma t} e^{\pm i\omega t}$$

$$= e^{-\gamma t}\left[\cos(\omega t) \pm i \sin(\omega t)\right]$$

Fall (iii)

$$\Rightarrow x(t) = e^{-\gamma t}\left[\left(\cos\omega t + \frac{\gamma}{\omega}\sin\omega t\right)x(0) + \frac{1}{\omega}(\sin\omega t)\, v(0)\right].$$