6.5 Def a) Man sagt, $u, v \in V$ seien **(zueinander) orthogonal**, $u \perp v$, falls $\langle u, v \rangle = 0$.

b) $\{v_1, v_2, \ldots\}$ endl. oder abzählbar heißt **Orthonormalsystem** (ONS) oder **Orthonormalfolge** (ONF), falls

$$\forall i,j: \quad \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Falls $\{v_1, v_2, \ldots\}$ überdies eine Basis von V ist, heißt sie auch **Orthonormalbasis** (ONB).

Bem
- $0 \in V$ gilt als $0 \perp v \;\forall v \in V$.
- In $\mathbb{R}^n$, wenn $u \neq 0 \neq v$, dann $\langle u, v \rangle = 0 = \|u\| \, \|v\| \cos \varphi$
  $\Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow \varphi = 90°$ oder $270°$
- In ONS ist jedes v_i Einheitsvektor, sie sind paarweise orthogonal.
- Eine echte Teilmenge einer ONB ist immer noch ONS.
- Ein Cartesisches Koordinatensystem entspricht einer ONB.

∘ Wenn $v \perp u_j \quad \forall j \in \{1 \dots r\}$ und $u \in \operatorname{Span}\{u_1 \dots u_r\}$, dann $v \perp u$.

Beweis: $\langle v, u \rangle = \langle v, \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j \rangle$

$$= \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \underbrace{\langle v, u_j \rangle}_{0} = 0.$$

<u>6.10 Bem</u> Sei $\{v_1, v_2 \dots\}$ ONS,

$u = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j$, $w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j$. Dann

∘ $\alpha_k = \langle v_k, u \rangle \quad \forall k \in \{1 \dots n\}$

∘ $\langle u, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} \beta_j$

∘ $\|u\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2}$ Parsevalsche Gleichung

<u>Beweis:</u> ∘ $\langle v_k, u \rangle = \langle v_k, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j \rangle$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \underbrace{\langle v_k, v_j \rangle}_{\delta_{kj}} = \begin{cases} \alpha_k & \text{falls } k \leq n \\ 0 & \text{falls } k > n \end{cases}$$

∘ $\langle u, w \rangle = \langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j, \sum_{k=1}^{n} \beta_k v_k \rangle$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_j} \beta_k \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{\delta_{jk}}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j} \beta_j$$

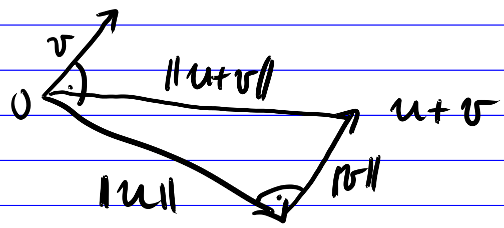
- $\|u\|^2 = \langle u,u\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{\alpha_j}\cdot\alpha_j$

$$= \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 \qquad \square$$

"Satz von Pythagoras" $u \perp v$

$$\Rightarrow \quad \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Beweis



$$\|u+v\|^2 = \langle u+v,\ u+v\rangle$$
$$= \langle u,u\rangle + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{} + \underbrace{\langle u,v\rangle}_{} + \langle v,v\rangle$$
$$= \|u\|^2 + 0 + 0 + \|v\|^2 \qquad \square$$

6.9 Lemma Jedes ONS $\{v_1, v_2 \dots\}$ ist linear unabh.

Beweis Sei $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j v_j = 0$

$$\Rightarrow \quad \alpha_k = \langle v_k, 0\rangle = 0 \qquad \square$$

6.10 Folgerung Jedes ONS $\{v_1, v_2 \dots\}$ ist ONB von $\mathrm{Span}\{v_1, v_2 \dots\}$

Insbes.: Ist $\dim V = n$ und $\{v_1 \dots v_n\}$ ONS, dann ist sie ONB.