Prop (Orthogonalzerlegung)

Sei V Skalarpr.raum, $n \leq \dim V \leq \infty$

$\{v_1 .. v_n\}$ ONS, $u \in V$.

Dann $u = u_{\parallel} + u_{\perp}$ und $u_{\parallel} \in \operatorname{Span}\{v_1 .. v_n\}$

und $u_{\perp} \perp v_k \ \forall k \in \{1 .. n\}$.

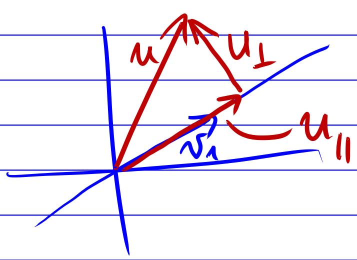
Beweis Setze $u_{\parallel} := \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \langle v_j, u\rangle v_j}_{\in \operatorname{Span}\{v_1 .. v_n\}}$

$u_{\perp} := u - u_{\parallel}$.

$$\begin{aligned}
\langle v_k, u_{\perp}\rangle &= \langle v_k, u - u_{\parallel}\rangle \\
&= \langle v_k, u\rangle - \langle v_k, u_{\parallel}\rangle \\
&= \langle v_k, u\rangle - \langle v_k, \sum_{j=1}^{n} \langle v_j, u\rangle v_j\rangle \\
&= \langle v_k, u\rangle - \langle v_k, u\rangle = 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Also auch $\langle u_{\parallel}, u_{\perp}\rangle = 0$.



6.6 Satz Sei V Sk.pr.raum $\dim V \leq \infty$.

$\{v_1 \dots v_n\}$ oder $\{v_1, v_2, \dots\}$ (abz. far) ONS.

a) Besselsche Ungleichung:

$\forall u, \cancel{v} \in V$:

$$\|u\|^2 := \langle u, u \rangle \geq \sum_{j=1}^{n} |\langle v_j, u \rangle|^2$$

bzw. $$\|u\|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\langle v_j, u \rangle|^2$$

(F. W. Bessel 1828)

b) Cauchy-Schwarz-Ungleichung:

$\forall u, v \in V$: $|\langle v, u \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$

(A. L. Cauchy 1821,
V. Bunjakowski 1859,
H. A. Schwarz 1884)

~~Beweis~~ **Bew**

- Für $\dim V < \infty$, geometrie $\Rightarrow$

$(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ $\langle u, v \rangle = \|u\| \, \|v\| \cos \varphi$

$-1 \leq \cos \varphi \leq 1 \Rightarrow$ CS.

- Wenn $\dim V = n < \infty$
  und $\{v_1 \ldots v_n\}$ ONB, dann

$$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |\langle v_j, u\rangle|^2 \underset{m<n}{\geq} \sum_{j=1}^{m} |\langle v_j, u\rangle|^2$$

Bessel-Ungl.

gilt auch für ONS $\neq$ ONB

gilt auch für $\dim V = \infty$.

<u>Beweis</u> a) $\|u\|^2 = \langle u, u\rangle = \langle u_\parallel + u_\perp, u_\parallel + u_\perp\rangle$

$$= \langle u_\parallel, u_\parallel\rangle + \underbrace{\langle u_\parallel, u_\perp\rangle}_{0} + \underbrace{\langle u_\perp, u_\parallel\rangle}_{0}$$

$$+ \langle u_\perp, u_\perp\rangle$$

$$= \|u_\parallel\|^2 + \|u_\perp\|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |\langle v_j, u\rangle|^2 + \underbrace{\|u_\perp\|^2}_{\geq 0}$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n} |\langle v_j, u\rangle|^2 \quad \text{d.h. Bessel-Ungl.}$$

b) CS: Klar für $u = 0$. Sei $u \neq 0$.

$$\left\{\frac{u}{\|u\|}\right\} \text{ ist ONS} \Rightarrow \|v\|^2 \underset{\text{B-U}}{\geq}$$

$$\left| \left\langle \frac{u}{\|u\|}, v \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{\|u\|^2} \left| \langle u, v \rangle \right|^2 \qquad \square$$