6.7 Def Sei V $\mathbb{K}$-VR, $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$

$\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$

heißt **Norm**, wenn

a) $\|u\| = 0 \iff u = 0 \quad \forall u \in V$

("definit")

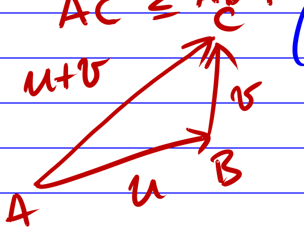
b) $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\| \quad \forall u \in V, \lambda \in \mathbb{K}$

("homogen")

c) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \forall u, v \in V$

$AC \leq AB + BC$

("Dreiecks-Ungleichung")



6.8 Satz Auf $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist die **euklidische Norm** $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ eine Norm.

Bew a) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pos. def. $\Rightarrow$

$\|u\| \geq 0$ und $\|u\| = 0 \iff u = 0$.

b) $\|\lambda u\| = \sqrt{\langle \lambda u, \lambda u \rangle} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} \langle u, u \rangle}$

$= \sqrt{\underbrace{\bar{\lambda} \lambda}_{|\lambda|^2}} \sqrt{\langle u, u \rangle} = |\lambda| \, \|u\|$.

c) $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$

$$= \langle u,u\rangle + \underline{\langle u,v\rangle} + \underbrace{\langle v,u\rangle}_{=\underline{\overline{\langle u,v\rangle}}} + \langle v,v\rangle$$

$[z+\overline{z} = 2\operatorname{Re} z]$

$$= \|u\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle u,v\rangle + \|v\|^2$$

$$\leq \|u\|^2 + 2\,|\langle u,v\rangle| + \|v\|^2$$

[weil $\forall z \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Re} z \leq |z|$]

$$\overset{CS}{\leq} \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2$$

$$= \underline{\underline{\left(\|u\| + \|v\|\right)^2}} \quad \overset{\sqrt{}}{\Longrightarrow} \text{ Dreiecks-Ungl.} \ \square$$