6.4 Def

$$\ell^2 := \left\{ (a_1, a_2, \dots) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \;; \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty \right\}$$

"quadrat-summierbare Folgen"

6.4 Satz a) ℓ^2 ist ein $\mathbb{C}$-VR.

b) Für $a, b \in \ell^2$ konvergiert die Reihe

$$\langle a, b\rangle_{\ell^2} := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k}\, b_k$$

und def. ein Skalarprodukt auf ℓ^2.

Beweis Seien $a, b \in \ell^2$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ ist ein $\mathbb{C}$-VR.

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |\lambda a_k|^2 = |\lambda|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \cancel{|\lambda|^2} |a_k|^2 < \infty.$
  $\Rightarrow \lambda a \in \ell^2$

- Zeige: $a + b \in \ell^2$

$$0 \le |a_k - b_k|^2 = \overline{(a_k - b_k)}\,(a_k - b_k)$$

$$= \underbrace{\overline{a_k} a_k}_{|a_k|^2} \underbrace{- \overline{b_k} a_k - \overline{a_k} b_k}_{-2\,\mathrm{Re}(\overline{a_k} b_k)} + \underbrace{\overline{b_k} b_k}_{|b_k|^2}$$

$$2\,\mathrm{Re}(\overline{a_k} b_k) \le |a_k|^2 + |b_k|^2$$

$$|a_k+b_k|^2 = \overline{(a_k+b_k)}(a_k+b_k)$$

$$= \bar{a}_k a_k + \bar{b}_k a_k + \bar{a}_k b_k + \bar{b}_k b_k$$

$$= |a_k|^2 + \underbrace{2\,\mathrm{Re}(\bar{a}_k b_k)}_{\le |a_k|^2 + |b_k|^2} + |b_k|^2$$

$$\le 2|a_k|^2 + 2|b_k|^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k+b_k|^2}} \le \underbrace{2\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2}_{<\infty}$$

$\Rightarrow a+b \in \ell^2$ (Majorantenkrit.)

Also ist ℓ^2 UR von $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

b) Zeige: $\sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k b_k$ konv.

$$\bullet\ 0 \le \left(|\bar{a}_k| - |b_k|\right)^2 =$$

$$= |\bar{a}_k|^2 - 2|\bar{a}_k b_k| + |b_k|^2$$

$$\Rightarrow |\bar{a}_k b_k| \le \tfrac{1}{2}\left(|a_k|^2 + |b_k|^2\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\bar{a}_k b_k| \le \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2}_{<\infty}$$

(Majorantenkrit.)

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k b_k \text{ konv. in } \mathbb{C}.$$

- $\langle a,a\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \geq 0$

- und $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = 0 \iff a_k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$

  $\iff a = 0$ (pos. def.)

- $\langle a, \lambda b + c\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k (\lambda b_k + c_k)$

  $= \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k b_k + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k c_k = \lambda\langle a,b\rangle + \langle a,c\rangle$

  $\Rightarrow$ linear im 2ten Arg.

Hermitizität

- $\langle b,a\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\bar{b}_k a_k}_{\overline{\bar{a}_k b_k}}$

  $= \overline{\sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k b_k} = \overline{\langle a,b\rangle}$ $\square$