

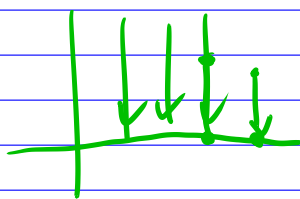
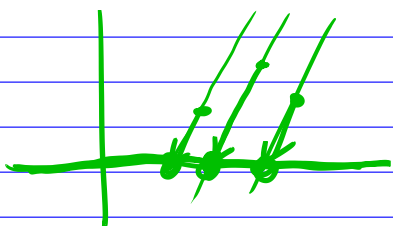
Orthogonale Projektion

6.11 Def $P \in \mathcal{L}(V)$ heißt Projektion,
falls $P^2 = P$.

und orthogonale Projektion

falls außerdem $\langle u, Pv \rangle = \langle Pu, v \rangle$

$$\forall u, v \in V.$$



(gründe siehe
ÜA 39 Bl. 10)



6.12 Def

V Sk.pr.raum

Für $\emptyset \neq A \subseteq V$ heißt

$$A^\perp := \{ u \in V : \langle u, v \rangle = 0 \forall v \in A \}$$

das orthogonale Komplement von A .

$A^\perp$ ist UR.

6.13 Satz Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ UNS $\subset V$

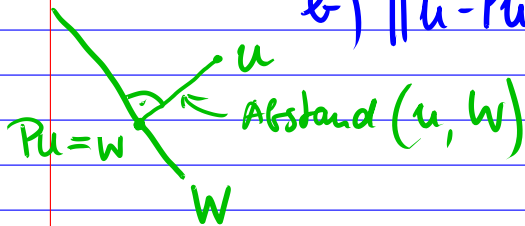
$W := \text{Span}\{v_1, \dots, v_n\}$ und

$$Pu := \sum_{k=1}^n \langle v_k, u \rangle v_k \quad \forall u \in V$$

Dann ist $P \in \mathcal{L}(V)$, orth. Proj.,
und $\forall u \in V$:

a) $Pu \in W, \quad (I-P)u \in W^\perp$

b) $\|u - Pu\| = \min \{ \|u - w\| : w \in W \}$



$= \text{Abstand}(u, W)$

P hängt nur von W ab, nicht von der ONB in W ; $P = P_W$ "orth. Proj. auf W ".

Beweis • $Pu \in W$ klar

• $(I-P)u \in W^\perp$? Sei $w \in W$

$$\Rightarrow w = \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \Rightarrow$$

$$\langle w, \underbrace{(I-P)u}_{u - Pu} \rangle = \langle w, u \rangle - \langle w, Pu \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j \langle v_j, u \rangle - \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j \langle v_j, \sum_{k=1}^n \langle v_k, u \rangle v_k \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j \left(\langle v_j, u \rangle - \underbrace{\sum_{k=1}^n \langle v_k, u \rangle \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{\delta_{jk}}}_{\langle v_j, u \rangle} \right)$$

$$= 0$$

Also ist $(I-P)u \in W^\perp$.

• Minimierungsproblem:

$$\|u - w\|^2 = \left\| u - \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j \right\|^2$$

$$= \left\langle u - \sum_{j=1}^n \lambda_j v_j, u - \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k \right\rangle$$

$$= \langle u, u \rangle - \sum_{j=1}^n \bar{\lambda}_j \langle v_j, u \rangle - \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle u, v_k \rangle$$

$$+ \underbrace{\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \bar{\lambda}_j \lambda_k \underbrace{\langle v_j, v_k \rangle}_{\delta_{jk}}}_{|\lambda_j|^2}$$

$$= \|u\|^2 + \sum_j |\lambda_j - \langle v_j, u \rangle|^2$$

$$- \sum_j |\langle v_j, u \rangle|^2$$

$$= \min! \quad \text{in } \lambda_j$$

Minimum wird angenommen bei
und nur bei $\lambda_j = \langle v_j, u \rangle$.

◦ $P \in \mathcal{L}(V)$ klar.

◦ $P^2 = P$? b) $\Rightarrow$ Für $w \in W$ ist
 $Pw = w \Rightarrow \forall u \in V: P^2 u = P(\underbrace{Pu}_{\substack{\in W \\ \text{nach a)}}}) = Pu.$

$$\circ \langle Pu, v \rangle - \langle u, Pr \rangle$$

$$= \langle Pu, v \rangle - \langle Pu, Pr \rangle +$$

$$+ \langle Pu, Pr \rangle - \langle u, Pr \rangle$$

$$= \langle \underbrace{Pu}_{\in W}, \underbrace{(I-P)r}_{\in W^\perp} \rangle - \langle \underbrace{(I-P)u}_{\in W^\perp}, \underbrace{Pr}_{\in W} \rangle$$

$$= 0 - 0 = 0. \quad \text{Also ist } P \text{ orth. Proj.}$$

◦ P unabh. von der Wahl der ONB

$\Leftarrow$ Minimierer eindeutig.

□

Def Für $X, Y \subseteq V \leftarrow \text{Sk.pr.raum}$

$$X \neq \emptyset \neq Y,$$

$$\text{Abstand}(X, Y) := \inf \left\{ \|x - y\| : \begin{matrix} x \in X \\ y \in Y \end{matrix} \right\}$$

Folgerung a) $\text{Abstand}(u, W) =$

$$\| (I - P_W)u \| = \| u_\perp \|^2$$

b) Für affine Unterräume:

$$\text{Abstand}(p+U, q+W)$$

$$= \inf \{ \|p+u - q-w\| : u \in U, w \in W \}$$

$$= \inf \{ \|(p-q) + (u-w)\| : u \in U, w \in W \}$$

$$= \inf \{ \|(p-q) - v\| : v \in U+W \}$$

$$= \text{Abstand}(p-q, U+W)$$

$$= \| (I - P_{U+W})(p-q) \|.$$