

Das Orthonormierungsverfahren von Gram und Schmidt

$V, \langle \cdot, \cdot \rangle, \{u_1, u_2, \dots\}$ endl.
oder abzählb. unendl. Menge,
lin. unabh.

Wir konstruieren ONS $\{v_1, v_2, \dots\}$
mit

$$\text{Span} \{v_1, \dots, v_n\} = \text{Span} \{u_1, \dots, u_n\} \\ \forall n \in \mathbb{N}$$

1. Schritt $v_1 := \frac{u_1}{\|u_1\|}$ erfüllt $\|v_1\| = 1$

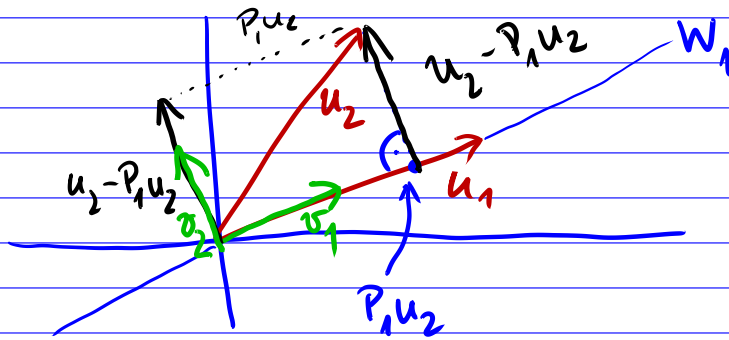
$\Rightarrow \{v_1\}$ ist ONS mit $\text{Span} \{v_1\}$
 $= \text{Span} \{u_1\} =: W_1$.

2. Schritt $P_1 := P_{W_1}$ d.h.

$$P_1 u := \langle v_1, u \rangle v_1$$

Wg. $u_2 \notin W_1$ gilt $u_2 - P_1 u_2 \neq 0$

$$\Rightarrow \exists v_2 := \frac{u_2 - P_1 u_2}{\|u_2 - P_1 u_2\|}$$



Beachte $\|v_2\| = 1$

$v_2 \in W_1^\perp$, weil $u_2 - P_1 u_2 \in W_1^\perp$
(Satz 6.13a)

$v_1, v_2 \in \text{Span}\{u_1, u_2\}$, lin. unabh.

$\Rightarrow \text{Span}\{v_1, v_2\} = \text{Span}\{u_1, u_2\} =: W_2$

n-ter Schritt (vollst. Induktion)

Seien $v_1, \dots, v_{n-1}$ ONS mit

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_{n-1}\} = \text{Span}\{u_1, \dots, u_{n-1}\} =: W_{n-1}$$

$$P_{n-1} := P_{W_{n-1}}, \quad P_{n-1} u := \sum_{k=1}^{n-1} \langle v_k, u \rangle v_k.$$

$$u_n \notin W_{n-1} \Rightarrow u_n - P_{n-1} u_n \neq 0$$

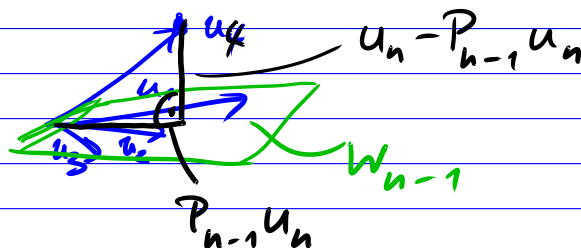
$$\Rightarrow \exists v_n := \frac{u_n - P_{n-1} u_n}{\|u_n - P_{n-1} u_n\|}$$

$$\|v_n\| = 1$$

$$v_n \in W_{n-1}^\perp$$

(Satz 6.13a)

$$v_1, \dots, v_n \in \text{Span}\{u_1, \dots, u_n\}$$



6.14 Korollar Gegeben $V, \langle \cdot, \cdot \rangle$
 $\dim V = n < \infty$

a) V besitzt eine ONB.

b) Jedes ONS $v_1 \dots v_m$ lässt sich zu einer ONB $v_1 \dots v_n$ ergänzen.

c) Für $U = \text{Span}\{v_1 \dots v_m\}$ gilt dann
 $U^\perp = \text{Span}\{v_{m+1} \dots v_n\},$

d) $(A^\perp)^\perp = \text{Span } A \quad \forall A \subseteq V$
 $A \neq \emptyset$

e) Für jeden UR $W \subseteq V$ ex. genau eine orth. Proj. P_W mit Bild $P_W = W$. Es gilt $\text{Kern } P_W = W^\perp$.

$$P_W u = \sum_{k=1}^{\dim W} \langle v_k, u \rangle v_k$$

f) Jeder $v \in V$ lässt sich auf eindeutige Weise zerlegen in
 $v = v_{||} + v_\perp$ mit $v_{||} \in W, v_\perp \in W^\perp$.
 Tatsächlich ist $v_{||} = P_W v$.

g) $P_{W^\perp} = I - P_W$

$$M(P_W) = \begin{bmatrix} \underbrace{1 \dots 1}_m & \underbrace{0 \dots 0}_{n-m} \\ \underbrace{0 \dots 0}_m & \underbrace{1 \dots 1}_{n-m} \end{bmatrix}, \quad M(P_{W^\perp}) = \begin{bmatrix} \underbrace{0 \dots 0}_m & \underbrace{1 \dots 1}_{n-m} \\ \underbrace{1 \dots 1}_m & \underbrace{0 \dots 0}_{n-m} \end{bmatrix}$$

h) Abstand $(v, W) = \|v_\perp\| = \|(I - P_W)v\|.$