

6.17 Lemma Sei $L \in \mathcal{L}(V, W)$ Isometrie.

a) L ist injektiv, und $\dim W \geq \dim V$

b) Falls $\dim W = \dim V < \infty$, so ist L surj.

c) Sind V, W Sk.pr.räume, dann

$$\langle Lu, Lv \rangle_W = \langle u, v \rangle_V \quad \forall u, v \in V.$$

" L ist nicht nur längentreu,
sondern auch winkeltreu."

Beweis a) $Lu = 0 \Rightarrow \|u\|_V = \|Lu\|_W = 0$

$$\Rightarrow u = 0.$$

Es folgt $\dim V = \dim \text{Bild } L \leq \dim W$.

b) bekannt.

c) Polarisationsgl.

□

6.33 Bem $A \in M(n, \mathbb{K})$

A ist unitär (orthogonal) $\Leftrightarrow$

Die Spalten bilden ONB.

Beweis " $\Rightarrow$ ": $\langle \underbrace{A e_i}_{i\text{-te Spalte}}, A e_j \rangle = \delta_{ij}$

" $\Leftarrow$ ": Sei $v_j := A e_j$ j -te Spalte

$$\left\| A \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right\| = \left\| \sum \alpha_j v_j \right\|$$

$$\stackrel{\text{Parseval'sche}}{\stackrel{\text{gl.}}{=}} \sqrt{\sum_j |\alpha_j|^2}$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \right\| \quad \square$$

Bsp

- Drehungen im $\mathbb{R}^n$ sind orthogonal
(gedrehte ONB ist ONB;
Drehungen sind Längentreu)

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ ist orthogonal}$$

- Spiegelungen sind orthogonal

$$\text{z.B. } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad e_2 \uparrow \quad e_1 \rightarrow \rightsquigarrow$$


- Drehungen bilden "rechtshändige" ONBen
auf "rechtshändige" ab
und linksh. auf linksh.
Spiegelungen bilden re. auf li.
und li. auf re. ab.

Satz Wenn $A \in M(n, \mathbb{R})$ orthogonal ist, dann $\exists$ ONB B in $\mathbb{R}^n$, so dass

$$M_B(A) = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & -1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & -1 \\ & & & & & & & R_{\varphi_1} \\ & & & & & & & & R_{\varphi_2} \\ & & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & & R_{\varphi_k} \end{bmatrix}$$

wobei $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ ein 2×2 -Kästchen bedeutet.

Beweis: A. Beutelspacher
Lineare Algebra
S. 268 (2. Auflage)

6.19 Lemma Sei $B = (v_1, \dots, v_n)$

ONB in Sk. prod. raum V

$$V \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad u \mapsto (u)_B = \begin{pmatrix} \langle v_1, u \rangle \\ \vdots \\ \langle v_n, u \rangle \end{pmatrix}$$

ist unitär.

Beweis Parsevalsche gl.

□

6.18 Bem In V mit $\dim V = \infty$

ist eine Isometrie nicht unbed.
surj. Gegenbeispiel:

Rechtsshift $R: \ell^2 \rightarrow \ell^2$

$$(a_1, a_2, \dots) \mapsto (0, a_1, a_2, \dots)$$

$\sum |a_n|^2 = 0 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \dots$
ist Isometrie, aber nicht surj.

Def surj. Isometrie $L: V \rightarrow W$

heißt isometrischer Isomorphismus
(falls V, W normiert)

& unitäre Äquivalenz
(falls V, W Sk.pr. räume)