

6.21 Def Sei $A \in M(m \times n, K)$, $K = \mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$
Die adjungierte Matrix ist

$$A^* = \overline{A}^T = \overline{A^T} \in M(n \times m, K)$$

Für $K = \mathbb{R}$ ist $A^* = A^T$

(auch A^+ , A^H statt A^*)

6.22 Lemma

a) $\langle x, Ay \rangle_{K^m} = \langle A^*x, y \rangle_{K^n}$

b) $\text{Rang } A^* = \text{Rang } A$

Für $A \in M(n, K)$ gilt weiter

c) $\det A^* = \det A$

d) λ ist EW von $A \Leftrightarrow$

$\bar{\lambda}$ ist EW von A^*

e) $g_{A^*}(\bar{\lambda}) = g_A(\lambda)$, $a_{A^*}(\bar{\lambda}) = a_A(\lambda)$

Beweis a) $\langle x, Ay \rangle_{K^m} = \sum_{j=1}^m \bar{x}_j \sum_{k=1}^n \underbrace{a_{jk}}_{\overline{a_{kj}^*}} y_k$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \bar{x}_j \overline{a_{kj}^*} \right) y_k$$
$$= \sum_{k=1}^n \overline{(A^*x)_k} y_k = \langle A^*x, y \rangle_{K^n}$$

$$b) R_g A^T = R_g A, R_g \bar{B} = R_g B$$

c) $\forall$ Poly $p(z_1 \dots z_r)$ mit reellen Koeffizienten:

$$\overline{p(z_1 \dots z_r)} = p(\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_r)$$

det A ist so ein Poly in $a_{11} \dots a_{nn}$

$$\text{Also } \overline{\det A} = \det \bar{A} = \det \bar{A}^T = \det A^*$$

$$\begin{aligned} d) \quad \underline{P_{A^*}(\bar{\lambda})} &= \det(\bar{A}^T - \bar{\lambda} E^T) \\ &= \det(\bar{A} - \bar{\lambda} E) \\ &= \det(\overline{A - \lambda E}) \\ &= \overline{\det(A - \lambda E)} \\ &= \underline{P_A(\lambda)} \end{aligned}$$

$$\text{Wenn } P_A(\lambda) = \sum c_k \lambda^k$$

$$\text{dann } P_{A^*}(\bar{\lambda}) = \sum \bar{c}_k \lambda^k$$

$$e) \text{ Fund. satz } \Rightarrow a_{A^*}(\bar{\lambda}) = a_A(\lambda).$$

$$\begin{aligned} g_{A^*}(\bar{\lambda}) &= \dim \text{Kern}(A^* - \bar{\lambda} E) \\ &= n - \text{Rang}(A^* - \bar{\lambda} E) \\ &= n - \text{Rang}((A - \lambda E)^*) \\ &= n - \text{Rang}(A - \lambda E) \\ &= \dim \text{Kern}(A - \lambda E) \\ &= g_A(\lambda) \end{aligned}$$

□

6.23 Lemma

a) $\forall A \in M(m \times k, K), B \in M(k \times n, K)$

$$(AB)^* = \underbrace{B^*}_{n \times k} \underbrace{A^*}_{k \times m}$$

b) Für $A \in M(m \times n, K)$ ist

$$A^*A \in M(n, K) \text{ und}$$

$$\langle x, A^*Ax \rangle_{K^n} = \|Ax\|_{K^m}^2 \quad \forall x \in K^n$$

Beweis a) $((AB)^*)_{ij} = \sum_{l=1}^k a_{jl} b_{li}$

$$= \sum_l \overline{a_{lj}^*} \overline{b_{li}^*} = \sum_{l=1}^k b_{il}^* a_{lj}^*$$

$$= (B^*A^*)_{ij}$$

b) $\langle x, A^*Ax \rangle = \overline{\langle A^*Ax, x \rangle}$

$$\stackrel{6.22a}{=} \overline{\langle Ax, Ax \rangle} = \langle Ax, Ax \rangle$$

$$= \|Ax\|^2.$$

□

Korollar Wenn $A \in M(n, K)$ regulär ist, dann auch A^* , und es gilt

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$$

Beweis $(A^{-1})^* A^* \stackrel{6.23a}{=} (A A^{-1})^* = E^* = E$

□

6.31 Satz Sei $A \in M(n, \mathbb{K})$

A unitär $\Leftrightarrow A^* = A^{-1}$.

Beweis " $\Leftarrow$ ": $\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle$

$$\stackrel{6.22b}{=} \langle x, A^*Ax \rangle \stackrel{\text{Voraus.}}{=} \langle x, A^{-1}Ax \rangle \\ = \langle x, x \rangle = \|x\|^2, \text{ Also } A \text{ Isometrie.}$$

$$\text{"} \Rightarrow \text{"}: \langle A^*Ax, y \rangle \stackrel{6.22b}{=} \langle Ax, Ay \rangle \\ \stackrel{6.17c}{=} \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{K}^n.$$

$$\text{Setze } y = e_j \Rightarrow (A^*Ax)_j = x_j$$

$$\Rightarrow A^*Ax = x \quad \forall x \in \mathbb{K}^n$$

$$\Rightarrow A^*A = E \Rightarrow A^* = A^{-1}. \quad \square$$

Bsp $(A^*A)_{ij} = \langle e_i, A^*A e_j \rangle$

$$= \langle \underbrace{A^*}_{A^*} e_i, A e_j \rangle$$

$$= \langle \text{Spalte}_i(A), \text{Spalte}_j(A) \rangle$$

$$= \delta_{ij} \quad \text{für ONB.}$$