

Exkurs: Minkowski-Raum

Def Der $(d+1)$ -dim. Minkowski-Raum M^{d+1} ist

$$\mathbb{R}^{d+1} = \left\{ \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ \vdots \\ x^d \end{pmatrix} : x^0, x^1, \dots, x^d \in \mathbb{R} \right\}$$

mit dem Minkowski-Produkt
(oder Pseudo-Skalarprodukt)

$$\langle\langle x, y \rangle\rangle := x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - \dots - x^d y^d$$

Beim $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ ist symm. und bilinear,
aber kein Sk.prod., weil nicht pos. def.

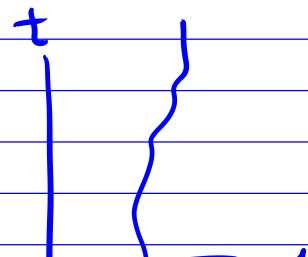
Spezielle Relativitätstheorie (Einstein 1905):

Raumzeit = M^4 mit

$x^0 = ct$, $c = \text{Lichtgeschwindigkeit}$.

$$\begin{pmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \text{Koo. eines Ereignisses}$$

Teilchenbahn =
Bewegung eines



$$\text{Feld} = F: \mathbb{M}^4 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{"Skalarfeld"} \\ F(ct, x^1, x^2, x^3)$$

Def $A \in M(d+1, \mathbb{R})$ heißt
pseudo-orthogonal oder Lorentz-
Transformation, wenn

$$\langle\langle Au, Av \rangle\rangle = \langle\langle u, v \rangle\rangle \\ \forall u, v \in \mathbb{M}^{d+1}$$

Bsp $d=1$, $\zeta \in \mathbb{R}$ "Rapidität"

$$A_\zeta = \begin{pmatrix} \cosh \zeta & \sinh \zeta \\ \sinh \zeta & \cosh \zeta \end{pmatrix} \text{ ist LT.}$$

Beweis $c := \cosh \zeta = \frac{e^\zeta + e^{-\zeta}}{2}$

$$s := \sinh \zeta = \frac{e^\zeta - e^{-\zeta}}{2}$$

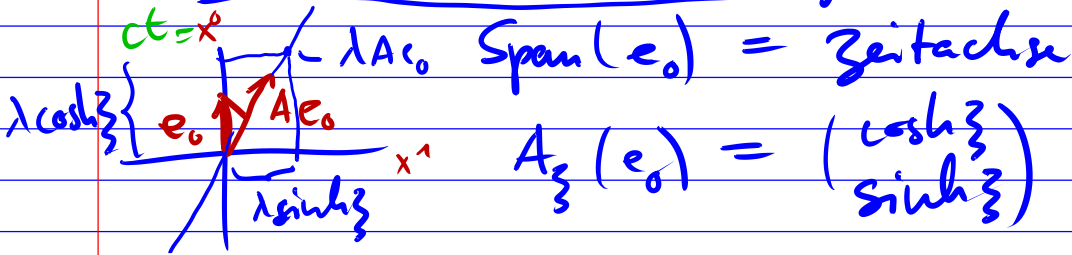
$$Ax = A \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx^0 + sx^1 \\ sx^0 + cx^1 \end{pmatrix}$$

Beachte $c^2 - s^2 = 1$. "hyperbolischer Pyth."

$$\langle\langle Ax, Ay \rangle\rangle = (Ax)^0 (Ay)^0 - (Ax)^1 (Ay)^1$$

$$= (cx^0 + sx^1)(cy^0 + sy^1) - (sx^0 + cx^1)(sy^0 + cy^1)$$

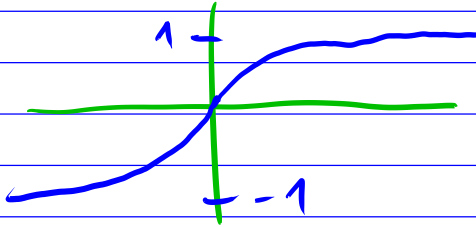
Andere Parametrisierung für A_3 :



$$\# A_3(\text{Span}(e_0)) = \text{Span}(A_3 e_0)$$

= Weltlinie eines Teilchens mit

gesucht: $v = \frac{X \sinh \{ \}}{X \cosh \{ \}} c = \tanh \{ \} c$



$$\tanh: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$$

$$\frac{v}{c} = \tanh^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$$

area tangens hyperbolicus

Wegen $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{\cosh^2\{\}}{\cosh^2\{}} = \frac{1}{\cosh^2\{}}$

folgt $\cosh \zeta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ und $\sinh \zeta = \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Also $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{bmatrix}$

Beh $\nexists$ ONB $v_1 \dots v_{d+1}$ mit $\langle\langle v_i, v_j \rangle\rangle = \delta_{ij}$

$$|d_n - d_{n+1}| \leq \frac{1}{2^n} \quad \text{für } n \geq 1$$

Def $\{v_0 \dots v_d\} \subseteq M^{d+1}$ heißt
pseudo-ONB oder Lorentz-Rahmen,
 wenn

$$\langle\langle v_i, v_j \rangle\rangle = \eta_{ij} \text{ mit } \eta = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & \ddots \\ & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Bsp • Standard basis

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_d = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• Spalten einer LT A , denn

$$\langle\langle Ae_i, Ae_j \rangle\rangle = \langle\langle e_i, e_j \rangle\rangle = \eta_{ij}$$

Beim $\langle\langle x, y \rangle\rangle = x^T \eta y$, daher

$$A \text{ Lorentz-Transform} \Leftrightarrow A^T \eta A = \eta$$

$$\begin{aligned} (\text{denn } \langle\langle Ax, Ay \rangle\rangle &= (Ax)^T \eta (Ay) \\ &= x^T (A^T \eta A) y \end{aligned} \quad \Bigg)$$

$$A^T \eta A = E \quad \text{orthogonal}$$