Dualraum

Sei V ein $\mathbb{K}$-VR, $\dim V = n < \infty$.

6.25 Def Der Dualraum V' von V ist $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$, seine El.e heißen Linearformen oder Kovektoren.

6.27 Bsp $x \in \mathbb{K}^n$ als Spalten $x \in M(n\times 1, \mathbb{K})$, dann sind Zeilen $y \in M(1\times n, \mathbb{K})$ die Kovektoren:

$y\,x \in M(1\times 1, \mathbb{K}) = \mathbb{K}$

$x \mapsto yx$ ist lin. $\in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K})$

$y \in (\mathbb{K}^n)'$

$\forall L \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}): L \mathrel{\hat{=}} y$.

6.28 Bem Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V gegeben, dann def. jedes $v \in V$ einen Kovektor $L_v \in V'$ durch $\underbrace{L_v}_{V \to \mathbb{K}}(u) = \langle v, u \rangle$.

Umgek. ist jedes $L \in V'$ ein $L = L_v$ für ein $v \in V$, denn:

die Abb. $v \mapsto L_v$ ist $\mathbb{R}$-lin $V \to V'$

Unterschied zwischen V und V':
wenn kein $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Bspe: Räume ohne $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

- Minkowski-Raum
- Phasenraum
- thermodyn. Zustandsraum
  z.B. (E, V, N)
- Lsgen von Dgl.en

Bspe wo Kovektoren auftreten:

- Gradienten
  $$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

$f(\underbrace{x_1 \ldots x_n}_{x})$

$x \in V$

genauer: $f : V \to \mathbb{R}$, $\nabla f(x) = L$
ist die lin. Abb. $L : V \to \mathbb{R}$, so dass
$$f(x+h) = f(x) + Lh + o(h)$$
mit $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{\|h\|} = 0$.

• Minkowski-Raum: zu $v \in \mathbb{M}^{d+1}$ ist

$\tilde{L}_v$ ~~x~~ ein Kovektor definiert durch

$$\tilde{L}_v u = \langle\langle v, u \rangle\rangle,$$

aber $\tilde{L}_v \neq L_v$ definiert durch $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $\mathbb{R}^{d+1}$

wichtig, dass man v nicht mit L_v identifiziert.

Bsp $\quad \tilde{L}_{e_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$e_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{L}_{e_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

<u>Graphische Darstellung eines Kovektors</u>

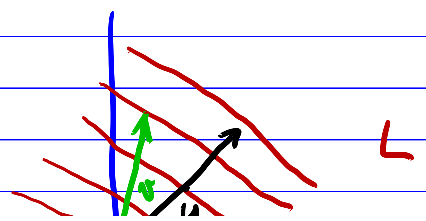
Schar paralleler affiner URe der Dim $n-1$. mit gleichen Abständen, einer durch 0.

$L(v) =$ "Anzahl" der von v durchstoßenen aff. URe

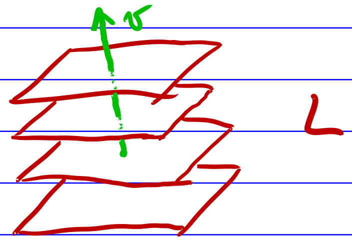
<u>Bspe</u> $\quad n = 2$

$L(v) = 3$

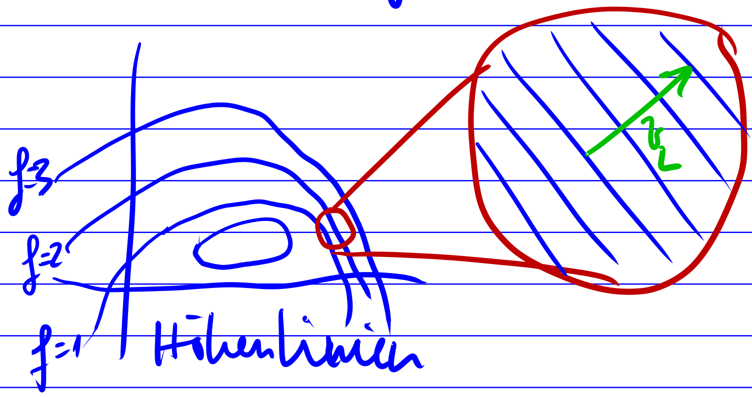
$L(u) = 3{,}7$



$n = 3$



Warum ist ein Gradient ein Kovektor?



Wenn $\langle \cdot , \cdot \rangle$, dann $v_L \perp$ Hyperebenen

Abstand der Hyperebenen $= \frac{1}{\|v_L\|}$, denn

$$\underbrace{L(v_L)}_{\frac{\|v_L\|}{\text{Abstand}}} = L_{v_L}(v_L) = \langle v_L, v_L \rangle = \|v_L\|^2$$

Bem "Dualraum", $V'' = V$.

Genauer: Jedes $v \in V$ def. eine lin. Abb.

$V' \to \mathbb{K}$, nämlich $L \mapsto L(v)$.

Deshalb kann man V'' mit V identifizieren (kanonisch ohne $\langle \cdot , \cdot \rangle$)