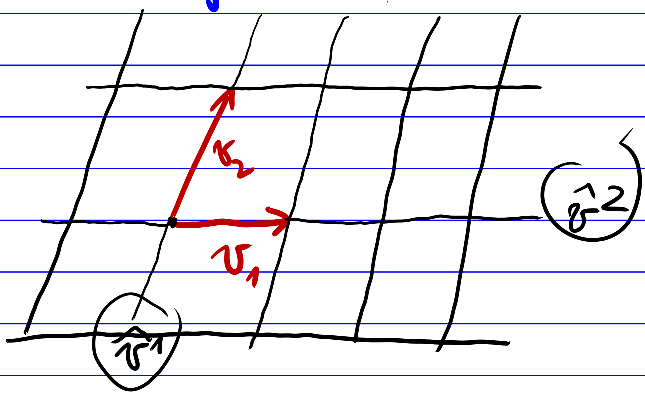
Duale Basis

Def Jeder Basis $B=(v_1,\dots,v_n)$ von V entspricht eine Basis $\hat{B}=(\hat{v}^1,\dots,\hat{v}^n)$ von V', genannt die duale Basis zu B,

$$\hat{v}^i(v_j)=\delta_{ij}$$

Bem $\hat{v}^i\left(\sum_j \alpha_j v_j\right)=\alpha_i$



Falls $(v_1 \dots v_n)$ ONB bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle$,

dann $\hat{v}^i=\underbrace{L_{v_i}}_{\langle v_i,\cdot\rangle}$ weil $L_{v_i}(v_j)=\delta_{ij}$

aber im allg. nicht!

siehe auch ÜA 42 (Blatt 11).

Notation

- Die Koeffizienten von $u \in V$ bzgl. $\mathcal{B}$ schreibt man oft mit oberen Indices, $u = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{u^k}_{\in K} \underbrace{v_k}_{\in V}$,

  die von $L \in V'$ bzgl. $\hat{\mathcal{B}}$ mit unteren Indices, $L = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{L_k}_{\in K} \underbrace{\hat{v}^k}_{\in V'}$.

- Im Minkowski-Raum,
  $$\tilde{L}_u = \langle\langle u, \cdot \rangle\rangle,$$
  schreibt man u_k für $(\tilde{L}_u)_k$.

  Es folgt $\langle\langle u, w \rangle\rangle = \tilde{L}_u(w)$
  $$= \underbrace{\sum_k u_k \hat{v}^k}_{\tilde{L}_u} \Big(\sum_j w^j v_j \Big)$$
  $$= \sum_{j,k} u_k w^j \underbrace{\hat{v}^k(v_j)}_{\delta_{kj}}$$
  $$= \underline{\sum_k u_k w^k}$$