Matrixgruppen

6.36 Def Sei $(G, \circ)$ eine Gruppe, $\emptyset \neq H \subset G$. Ist $(H, \circ)$ auch eine Gruppe, so heißt H eine **Untergruppe**.

Satz Ist $\emptyset \neq H \subset G$ abg. unter Mult. und Inversion $a \mapsto a^{-1}$, dann ist H Untergruppe.

Beweis $\circ$ ist dann Verknüpfung. Asso wird geerbt.
$e = a \circ a^{-1} \in H$, $a^{-1} \in H$ $\square$

Bem Der Schnitt 2er UGen ist UG.

Bspe
- Für jeden UR U des $\mathbb{K}$-VRes V ($\mathbb{K}$ irgend ein Körper) ist $(U, +)$ UG von $(V, +)$.
- Für $0 \neq m \in \mathbb{Z}$ ist $(m\mathbb{Z}, +)$ UG von $(\mathbb{Z}, +)$.

- Für $0 \neq a \in \mathbb{R}$ ist $(a\mathbb{Z}, +)$ UG von $(\mathbb{R}, +)$.
- Die invertierbaren $n \times n$-Matrizen bilden bezgl. Matrixmult. eine Gruppe: $e = E$, genannt <u>allg. lineare Gruppe</u> ("general linear group"), $GL(n, \mathbb{K})$.
  (Beachte: Produkt inv.barer inv.bar, wissen: asso.)
- Die unitären $A \in M(n, \mathbb{C})$ bilden eine UG von $GL(n, \mathbb{C})$, genannt die <u>unitäre Gruppe</u> $U(n)$.

<u>Beweis</u> $\subseteq$: klar. $A^* = A^{-1}$.
abg. Wenn $A, B \in U(n)$, dann

1) $\underline{(AB)^*} = B^* A^* = B^{-1} A^{-1} = \underline{(AB)^{-1}}$
   also $AB \in U(n)$.

2) $\underline{(A^{-1})^*} = (A^*)^{-1} = \underline{(A^{-1})^{-1}}$ $\square$

Alternativer Beweis

Wenn $A, B \in U(n)$, also $\|Au\| = \|u\|$ und $\|Bv\| = \|v\|$ $\forall v \in \mathbb{C}^n$, $\forall u \in \mathbb{C}^n$

$$\|A\underbrace{B\cancel{w}v}_{u}\| = \|Bv\| = \|v\|$$

also $AB \in U(n)$

und $\|A^{-1}v\| = \|AA^{-1}v\| = \|v\|$ $\forall v \in \mathbb{C}^n$

also $A^{-1} \in U(n)$. $\square$

- Die orthogonalen $A \in M(n, \mathbb{R})$ bilden eine UG von $GL(n, \mathbb{R})$, genannt die <u>orthogonale Gruppe</u> $O(n)$.
- Die $A \in M(n, K)$ mit $\det A = 1$ bilden UG von $GL(n, K)$, genannt die <u>spezielle lineare Gruppe</u> ("special linear group") $SL(n, K)$.

<u>Bew</u> $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

$$= 1 \cdot 1 = 1$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = 1. \quad \square$$

- $SU(n) = U(n) \cap SL(n,\mathbb{C})$
  spezielle unitäre Gruppe
  ist UG von $GL(n,\mathbb{C})$
  UG von $SL(n,\mathbb{C})$
  UG von $U(n)$.
- $SO(n) = O(n) \cap SL(n,\mathbb{R})$
  "spezielle orthogonale Gruppe"
  ist UG von $GL(n,\mathbb{R})$
  "Drehgruppe"
- $O(p,q) = \{ A \in GL(n,\mathbb{R}) :$
  $$A^T \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{p} & \\ & \underbrace{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}}_{q} \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{p} & \\ & \underbrace{\begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix}}_{q} \end{pmatrix} \}$$
  ist UG von $GL(n,\mathbb{R})$
  "pseudo-orthogonale Gruppe", $p+q=n$.
  $O(1,d) = \{$Lorentz-Trafos$\}$
  "Lorentz-Gruppe"
- $SO(p,q) = O(p,q) \cap SL(n,\mathbb{R})$.