Kap. 7: Symmetrische Operatoren

Def Eine Matrix $A \in M(n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) oder ein Endo. $T \in \mathcal{L}(V)$ eines Sk.pr.raumes V heißt symmetrisch / selbst-adjungiert / Hermitesch, falls $A = A^*$ bzw. $T = T^*$.

7.6 Satz über die Hauptachsen-Transformation = Spektralsatz für symmetrische Operatoren

Sei V Sk.prod.raum, $\dim V = n < \infty$, $T \in \mathcal{L}(V)$, $T = T^*$. Dann $\exists$ ONB aus EVen, und die EWe sind reell. Insbes. ist T diag.bar.

7.3 Satz $S, T \in \mathcal{L}(V)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V

a) Sind S, T s.a., dann auch $S + T$ und αS, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

b) Ist T s.a. und inv.bar, dann ist T^{-1} auch s.a.

c) Sei $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. T s.a. $\Leftrightarrow$ $\forall u \in V : \langle u, Tu \rangle \in \mathbb{R}$.

Beweis a) R s.a. $\Leftrightarrow \langle Ru,v\rangle = \langle u,Rv\rangle$

$\forall u,v\in V$

$$\langle (S+T)u,v\rangle = \langle Su,v\rangle + \langle Tu,v\rangle$$

$$= \langle u,Sv\rangle + \langle u,Tv\rangle \qquad = \langle u,(S+T)v\rangle$$

$$\underline{\langle(\alpha S)u,v\rangle} = \langle \alpha Su,v\rangle = \bar\alpha\langle Su,v\rangle$$

$$= \alpha\langle Su,v\rangle = \alpha\langle u,Sv\rangle =$$

$$= \langle u,\alpha Sv\rangle = \langle \underline{u,(\alpha S)}v\rangle$$

b) $$\underline{\langle T^{-1}u,v\rangle} = \langle T^{-1}u, TT^{-1}v\rangle$$

$$= \langle \underbrace{TT^{-1}}_{E,\ Id}u, T^{-1}v\rangle \qquad = \underline{\langle u, T^{-1}v\rangle}$$

c) "$\Rightarrow$": $\underline{\langle u,Tu\rangle} = \langle Tu,u\rangle = \overline{\langle u,Tu\rangle}$

$\Rightarrow \langle u,Tu\rangle \in \mathbb{R}$

"$\Leftarrow$": Folgt aus der

"Polarisierungsgl. für T"

$$\langle u,Tv\rangle = \frac14\underbrace{\langle u+v,T(u+v)\rangle}_{\in\mathbb{R}}$$

$$-\frac14\underbrace{\langle u-v,T(u-v)\rangle}_{\in\mathbb{R}}$$

$$-\frac{i}{4}\underbrace{\langle u+iv,T(u+iv)\rangle}_{\in\mathbb{R}}$$

$$+\frac{i}{4}\underbrace{\langle u-iv,T(u-iv)\rangle}_{\in\mathbb{R}}.$$

$\langle Tu,v\rangle$ $\square$

7.4 Satz Sei $T \in \mathcal{L}(V)$ s.a.

a) Alle EWe von T sind reell.

b) EVen von T zu verschiedenen EWen sind orthogonal.

c) Ist u EV von T, so ist

$$u^\perp := \{u\}^\perp = \{v \in V : v \perp u\}$$

T-invariant, d.h. $T(u^\perp) \subseteq u^\perp$.

Bew a) Sei $Tu = \lambda u$, $u \neq 0$, dann

$$\underline{\lambda \langle u,u \rangle} = \langle u, \lambda u \rangle = \langle u, Tu \rangle = \langle Tu, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle$$
$$= \bar{\lambda} \underline{\langle u, u \rangle}$$

$\langle u,u \rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$

alternativ: $\lambda \underbrace{\langle u,u \rangle}_{>0} = \langle u, Tu \rangle \in \mathbb{R}$ also $\lambda \in \mathbb{R}$

b) Sei $Tu = \lambda u$, $Tv = \mu v$, $\lambda \neq \mu$,
$u \neq 0 \neq v$

$$\underline{\mu \langle u,v \rangle} = \langle u, \mu v \rangle = \langle u, Tv \rangle = \langle Tu, v \rangle$$
$$= \langle \lambda u, v \rangle = \bar{\lambda} \langle u, v \rangle = \lambda \underline{\langle u, v \rangle}$$

oder $(\mu - \lambda) \langle u, v \rangle = 0$

c) Sei $w \in u^\perp$. Dann

$$\langle Tw, u\rangle = \langle w, Tu\rangle = \langle w, \lambda u\rangle$$
$$= \lambda \langle w, u\rangle = 0$$

also $Tw \in u^\perp$. $\square$

<u>7.5 Satz</u> $\dim V < \infty$, $T = T^*$
$\Rightarrow \exists$ EW.

<u>Beweis</u> $K = \mathbb{C}$: P_T besitzt (Fund.satz d. Alg) NST $\lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow$ EW.

Falls $K = \mathbb{R}$: Betrachte P_T als Poly $\mathbb{C} \to \mathbb{C} \Rightarrow \exists$ NST $\lambda \in \mathbb{C}$.

Betrachte $A = M_{\mathcal{B}}(T) \in M(n, \mathbb{R})$, $\mathcal{B}$ ONB, $\subset \underline{M(n,\mathbb{C})}$

$A = A^T$,

$A = A^*$, Endo. $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $P_A = P_T$

λ ist EW von $A \overset{7.4a}{\Rightarrow} \lambda$ reell.

$\Rightarrow \exists$ EW $\in \mathbb{R}$ von A $=$ EW $\in \mathbb{R}$ von T.

$\square$

$P_A(\lambda) = 0 \Rightarrow \det(A - \lambda E) = 0$
$\Rightarrow \operatorname{Kern}(A - \lambda E) \neq \{0\}$.