

7.6 Spektralatz für symm. Operatoren

$T = T^* \in \mathcal{L}(V)$, $\dim V = n < \infty$.

Dann $\exists$ ONB aus EVen.

Beweis durch Induktion nach $n = \dim V$.

$n=1$: klar.

$n \Rightarrow n+1$: Sei $\dim V = n+1$,

$T = T^* \in \mathcal{L}(V)$.

Satz 7.5 $\Rightarrow T$ hat EW $\lambda_1 \in \mathbb{R}$,

etwa $T v_1 = \lambda_1 v_1$ mit $\|v_1\| = 1$.

Setze $W_1 = v_1^\perp$. Kor. 6.14 $\Rightarrow$

$\dim W_1 = \dim V - 1 = n$.

Satz 7.4 c) $\Rightarrow T_1 := T|_{W_1} : W_1 \rightarrow W_1$

Automatisch ist W_1 Sk.pr.raum

und $T_1 = T_1^*$, denn $\langle u, T_1 v \rangle = \langle T_1 u, v \rangle$
 $\forall u, v \in W_1 \subset V$

Induktionsann. $\Rightarrow \exists$ ONB $v_2 \dots v_{n+1}$ in W_1

und $\lambda_2 \dots \lambda_{n+1}$ in $\mathbb{R}$ mit

$T v_k = T_1 v_k = \lambda_k v_k$ für $k=2 \dots n+1$

$\Rightarrow v_1, v_2, \dots, v_{n+1}$ ONB von V

aus EVen.

□

7.7 Korollar $T = T^* \Rightarrow$

$\exists S: \mathbb{K}^n \rightarrow V$ unitär so dass

$$S^{-1} T S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

λ_j wird $g(\lambda_j) = a(\lambda_j)$ -mal wiederholt.

7.8 Korollar $T = T^* \Rightarrow$

$$T = \sum_{k=1}^m \lambda_k P_k \quad \text{"Spektralzerlegung"}$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_m$ die versch. EWe

$P_k = \text{orth. Proj. auf } E_{\lambda_k}$ "Spektralproj."

"Spektrum" = $\{ \text{EWe} \}$

Beweis In einer ONB aus EVen ist

$$T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_m & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & \lambda_m & \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 & \end{bmatrix}}_{P_k} \quad \square$$

Rezept zur Hauptachsentransformation

= unitäre Diagonalisierung

Sei $A = A^* \in M(n, \mathbb{K})$

Aufgabe: Finde $S \in U(n)$ oder $O(n)$
und D diag., so dass $A = SDS^T$.

1) Bestimme $P_A(\lambda)$ und seine
versch. NSTen, die EWe $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ von A .

2) Für jedes λ_k bestimme eine
Basis B_k von E_{λ_k} , z.B. mit dem
Gauss-Verfahren zur Lösung des LGS
 $(A - \lambda_k E)x = 0$

3) Mit dem Gram-Schmidt-Verfahren
mache aus B_k eine ONB B'_k von E_{λ_k} .

4) $B'_1 \cup \dots \cup B'_m = \{v_1, \dots, v_n\}$ ONB von V
aus EVen = Spalten von S .

$$D = \text{diag} \left(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{g(\lambda_1) = a(\lambda_1)}, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots \right)$$