7.10 Def Ist $Q: V \times V \to \mathbb{K}$ eine symmetrische (= Hermitesche) Sesquilinearform, dann heißt Q (oder auch $\underline{Q(u)} = Q(u,u)$) eine <u>quadratische Form</u>.

7.11 Satz Geg. $V, \langle \cdot, \cdot \rangle$, $\dim V < \infty$

a) Wenn $T \in \mathcal{L}(V)$, $T = T^*$, dann ist
$$Q_T(u,v) = \langle u, Tv \rangle \quad \forall u,v \in V$$
eine quad. Form.

b) Jede quad. Form ist von dieser Form; T ist eind. best.

Beweis a) $\overline{Q_T(v,u)} = \overline{\langle v, Tu \rangle}$

$$= \langle Tu, v \rangle = \langle u, Tv \rangle = Q_T(u,v).$$

b) Sei $\mathcal{A} := (v_1 .. v_n)$ eine ONB.

$\underline{a_{jk}} := Q(v_j, v_k) = \overline{Q(v_k, v_j)} = \underline{\overline{a_{kj}}}$

$A = (a_{jk})$, $A = A^*$, A s.a.

$T := L_{\mathcal{A}}(A)$, also $T v_k = \sum_{j=1}^{n} a_{jk} v_j$

$\Rightarrow \langle u, Tv \rangle = \langle \sum \overset{\mathbb{K}}{\underset{\Downarrow}{u_j}} v_j, T \sum \beta_k v_k \rangle$

$= \sum u_j^* \beta_k \langle v_j, \sum^n a_{ik} v_i \rangle$

Eind.: $Q(u,v) = \langle u, Tv\rangle$, $A = M_{\mathcal{A}}(T)$

$\Rightarrow a_{jk} = \boxed{Q(v_j, v_k)} = \langle v_j, Tv_k\rangle$

$\square$

7.12 Korollar Q quad. Form $\Rightarrow$

$\exists$ ONB $(v_1 \dots v_n)$:

$$\forall u \in V: \quad Q(u) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \, |\langle v_j, u\rangle|^2$$

mit $\lambda_j \in \mathbb{R}$.

$$\left(u = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\langle v_j, u\rangle}_{u_j} v_j \right), \quad \langle u, Tu\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} u_j^* \underbrace{(Tu)_j} = \sum_{j=1}^{n} u_j^* \lambda_j u_j$$

$$T \sum u_j v_j = \sum u_j \lambda_j v_j$$

7.13 Korollar (Rayleigh-Ritz-Prinzip)

Seien $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots \le \lambda_n$, dann

$$\lambda_1 = \min \{ Q(u) : \|u\| = 1 \}$$

$$\lambda_n = \max \{ Q(u) : \|u\| = 1 \}$$

Beweis $u = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$, $Tv_k = \lambda_k v_k$

$$Q(u) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k |u_k|^2 \ge \sum_{k=1}^{n} \lambda_1 |u_k|^2$$

$$= \lambda_1 \|u\| = \lambda_1$$

$Q(v_1) = \lambda_1$