7.16 Bsp.: kleinste Quadrate

Problem: $Ax = y$ $\quad A \in M(m\times n, \mathbb{R})$ geg.

$\square\, \square = \square$ $\quad y \in \mathbb{R}^m$ geg.

Sei $m > n$

$= \text{Rang}\, A$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$ ges.

mehr. Gl. en als Unbek.

Im allg. $y \notin \text{Bild}\, A \Rightarrow$ nicht lösbar.

suche beste Approx. = Minimierer u

von $\|Au - y\|$.

Lsg Wir wissen: $Au = Py$,

P = orth. Proj. auf Bild A

$n = \text{Rg}\, A = \dim \text{Bild}\, A \Rightarrow A$ bij

$\mathbb{R}^n \to \text{Bild}\, A$

$\Rightarrow$ "$Au = Py$" hat eind. Lsg. u.

Alternativ: Kap 3 $\Rightarrow A^T A u = A^T y$

$B^T = (A^TA)^T = A^T A^{TT} = A^TA = B$ "Gaußsche Normalengl."

$B := A^T A \in M(n\times n, \mathbb{R})$ ist pos. def.

Denn: a) $\langle x, Bx\rangle = \langle x, A^TAx\rangle_{\mathbb{R}^n}$

$= \langle Ax, Ax\rangle_{\mathbb{R}^m} = \|Ax\|^2 \geq 0$.

b) Wg. $\text{Rg}\, A = n$ ist $\text{Kern}\, A = \{0\}$.

$\overset{x\neq 0}{\Rightarrow}$ $\|Ax\|^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$. Also B pos. def.

$\Rightarrow B$ invertbar $\Rightarrow$ Gaußsche Normalengl.

$Bu = A^T y$ ist eind. Lösb.

$\Rightarrow u = \underline{B^{-1} A^T y} = (A^T A)^{-1} A^T y$.

<u>Folgerung</u>: $Au = Py \Rightarrow \underline{AB^{-1}A^T y = Py}$.

daher $P = A(A^T A)^{-1} A^T$.

<u>Alternativbeweis</u> (direkt) für:

$P = A(A^T A)^{-1} A^T$ ist die

orth. Proj. auf Bild A.

a) $P^2 = P$: $P^2 = A\cancel{(A^T A)^{-1}}\cancel{(A^T A)}(A^T A)^{-1} A^T$

$= A(A^T A)^{-1} A^T = P$.

b) P s.a., $P^T = P$: $P^T = A\left((A^T A)^{-1}\right)^T A^T$

$= A\left(\underbrace{(A^T A)^T}_{A^T A}\right)^{-1} A^T = A(A^T A)^{-1} A^T$

$= P$.

$\Rightarrow P$ orth. Proj. auf Bild P.

c) Bild $P \subseteq$ Bild A: $Py = A\underbrace{\left[(A^T A)^{-1} A^T y\right]}$

$\in$ Bild A.

d) Bild $P \supseteq$ Bild A: $PAu =$

$A\cancel{(A^T A)^{-1}}\cancel{(A^T A)}u = Au$. $\square$