7.17 Bsp: Kegelschnitte

$$P(x,y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \delta x + \varepsilon y + \zeta$$

$P(x,y) = 0$ $\qquad x = \binom{x}{y}$

$\langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle = c$ $\qquad (*)$

$x \in \mathbb{R}^2$ ges.

$c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^2$, $A \in M(2,\mathbb{R})$ geg.

OBdA $A = A^T$, denn jedes $A = S + T$, $S = S^T$, $T = -T^T$, $\langle x, Ax\rangle = \langle x, Sx\rangle + \langle x, Tx\rangle$

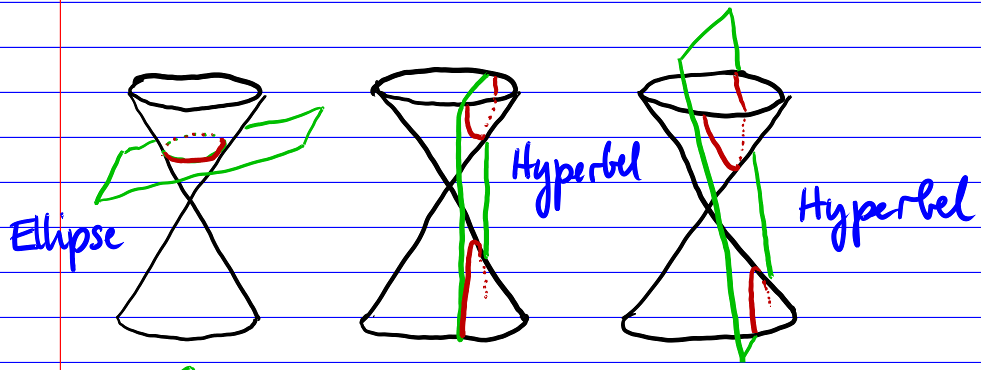
$$\underline{\langle x, Tx\rangle} = \langle T^T x, x\rangle = \langle -Tx, x\rangle = -\langle Tx, x\rangle = -\underline{\langle x, Tx\rangle}$$

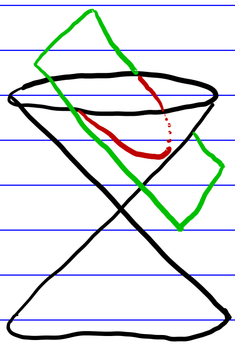
$\Rightarrow \langle x, Tx\rangle = 0$.

(alternativ: $\sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = \sum_{ij} \frac{a_{ij} + a_{ji}}{2} x_i x_j$)

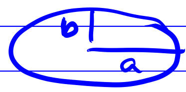
__Beh__ Lsgsmenge L von $(*)$ ist $\emptyset$ oder $\mathbb{R}^2$ oder 2 par. Geraden oder ein Kegelschnitt (d.h. Ellipse oder Parabel oder Hyperbel oder 1 Gerade oder 2 Geraden, die sich schneiden, oder 1 Punkt).

$$\text{Kegel} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 = x^2 + y^2\}.$$





Gl. einer Ellipse



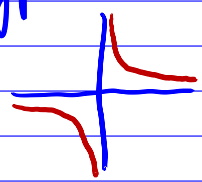
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Gl. einer Parabel:

$$y = a^2 x^2$$

Gl. einer Hyperbel:

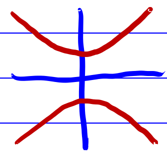
$$xy = 1$$



oder $y = \pm\sqrt{1 + x^2}$

$\iff \quad y^2 = 1 + x^2$

$\iff \quad \underline{y^2 - x^2 = 1}$



(cosh & sinh)

$y = \cosh t$

$x = \sinh t$

Beweis (i) Falls $\det A \neq 0$.

1) Durch Translation $x \mapsto x - x_0$ kann man b zu 0 machen:

$$\langle x - x_0, A(x-x_0)\rangle =$$

$$= \langle x, Ax\rangle - \underbrace{\langle x_0, Ax\rangle}_{\langle Ax_0, x\rangle} - \underbrace{\langle x, Ax_0\rangle}_{\langle Ax_0, x\rangle} + \langle x_0, Ax_0\rangle$$

$$= \langle x, Ax\rangle - 2\langle Ax_0, x\rangle + \langle x_0, Ax_0\rangle$$

$$= \langle x, Ax\rangle + \langle b, x\rangle + c'$$

mit $b = -2Ax_0$

Wir betrachten daher $\langle x, Ax\rangle = c$.

2) Hauptachsentrafo $S \in O(2)$.

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad y := S^{-1}x$$

$$\langle x, Ax\rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

OBdA $c \geq 0$ (sonst $c \to -c$, $A \to -A$)

<u>Falls A pos. def.</u> <u>und $c > 0$</u>: L = Ellipse mit Radien $\sqrt{\frac{c}{\lambda_i}}$

<u>Falls A pos. def. und $c = 0$</u>: $L = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

Falls A neg. def. und $c>0$: $L=\emptyset$

Falls A neg. def. und $c=0$: $L=\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

Falls A indef. und $c>0$: $L=$ Hyperbel

Falls A indef. und $c=0$: $y_2^2=(m y_1)^2$

$\Leftrightarrow \quad y_2 = \pm m y_1 \Leftrightarrow$ 2 Geraden, die sich schneiden

(ii) Falls $A=0$: $\langle b,x\rangle = c \quad (*)$

$b\neq 0 \quad \Rightarrow \quad L=$ Gerade

$c=0,\ b=0 \quad \Rightarrow \quad L=\mathbb{R}^2$

$c\neq 0,\ b=0 \quad \Rightarrow \quad L=\emptyset$

(iii) Falls ~~A~~ $\det A=0$, $A\neq 0$

$\Rightarrow$ oBdA $\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq 0$, oBdA $\lambda_2>0$

(sonst $A\to -A$, $b\to -b$, $c\to -c$)

$$(*) \Leftrightarrow \lambda_2 y_2^2 + \langle \underbrace{S\vec{b}}_{=:u}, y\rangle = c$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 y_2^2 + u_2 y_2 + u_1 y_1 = c$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 \Big(\underbrace{y_2 + \frac{u_2}{2\lambda_2}}_{z_2}\Big)^2 + u_1 \underbrace{y_1}_{z_1} = c + \lambda_2 \frac{u_2^2}{4\lambda_2^2}$$

Falls $u_1\neq 0$: $L=$ Parabel

$$y_1 = -\frac{\lambda_2}{u_1}(\underbrace{y_2 + \text{const}}_{z_2})^2 + \text{const.}$$

Falls $u_1=0,\ c > -\frac{\cancel{4}u_2^2}{4\lambda_2}$: $L=2$ par. geraden,

Falls $u_1=0,\ c = -\frac{u_2^2}{4\lambda_2}$: $L=1$ gerade (y_1 bel.)

Falls $u_1=0,\ c < -\frac{u_2^2}{4\lambda_2}$: $L=\emptyset$.

$\square$