7.18 Def Funktionalkalkül $f(T)$

Sei $M \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $f: M \to K$

$T = T^*$ mit EWen $\{\lambda_1 \ldots \lambda_{\cancel{m}\,n}\} \subseteq M$

also $T = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} S^{-1}$.

Dann $f(T) \in \mathcal{L}(V)$

$$f(T) := S \begin{pmatrix} f(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & f(\lambda_n) \end{pmatrix} S^{-1}$$

Bsp • Für $f(x) = \frac{1}{x}$, $M = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

stimmt $f(T)$ mit T^{-1} überein.

• Für $f(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k x^k$ stimmt

$f(T)$ mit $\sum_{k=0}^{m} c_k T^k$ überein

7.19 Bsp Sei $A = A^*$ pos. semidef.

$f(x) = \sqrt{x}$, $M = [0, \infty)$.

$$\Rightarrow \sqrt{A} = S \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} S^{-1}$$

Tatsächlich: $\sqrt{A}\sqrt{A} = A$, und

$\sqrt{A}$ ist s.a. und pos. semidef.

($\sqrt{A}$ ist ~~der~~ die einzige Matrix B, mit $B = B^*$, $B \geq 0$, $B^2 = A$.)