

Kap. 8: Klassifikation von Matrizen

oder: Die Jordansche Normalform

Nicht jeder Endo $T \in \mathcal{L}(V)$ besitzt eine Basis, die ihn diagonalisiert, aber

8.13 Teil 1 Satz Zu jedem $T \in \mathcal{L}(V)$ eines $\mathbb{C}$ -VRs V mit $\dim V = n < \infty$ gibt es eine Basis B in V , so dass $M_B(T)$ die Jordansche Normalform (JNF) hat.

8.12 Def $A \in M(n, \mathbb{C})$ hat JNF, wenn A blockdiagonal ist,

$$A = \begin{bmatrix} J_1 & & & & \\ & J_2 & & & \\ & & J_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & J_r \end{bmatrix}$$

und jeder Block dabei ein

Jordan-Block oder Jordan-Kästchen,

d.h. $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$ mit irgend einem $\lambda \in \mathbb{C}$.

Bspx • Eine Diagonalmatrix ist in JNF

alle JK 1×1

$$J = [\lambda], \quad A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & \\ & \boxed{J_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \boxed{J_n} \end{bmatrix}$$

$$\circ \begin{bmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & 1 & & \\ & & 3 & 0 & \\ \hline & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 & 0 \\ & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & 5 & 1 \\ & & & & & & & 5 & 0 \\ & & & & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

• Man schreibt $J = \lambda E + N$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

• $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix}$ ist in JNF mit $\lambda = 2$.

$$\circ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 0 \\ \hline & & & 2 \end{bmatrix}$$

sind in JNF.

$$\begin{bmatrix} 2 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix}$$

8.13 Teil 2 Satz Zu jedem $T \in \mathcal{L}(V)$

ist die JNF eind. bis auf die Reihenfolge der Jordankästchen.

8.14 Korollar A diagbar $\Leftrightarrow$
alle JKen haben Größe 1.

Folgerung $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ & 2 \end{bmatrix}$ ist nicht
diag. bar.

(Auch direkt: nur EW 2, aber
 $A \neq 2E$, $g(2) = 1 < 2 = a(2)$.)

Def A, B ähnlich $\Leftrightarrow$
 $\exists S \in GL(n, \mathbb{C}) : A = SBS^{-1}$.

Folgerung $A, B \in M(n, \mathbb{C})$ ähnlich $\Leftrightarrow$
 $JNF(A) = JNF(B)$ bis auf
Reihenfolge der JK.

Beweis $A = SBS^{-1}$

$\Leftrightarrow \exists$ Basis $B : A = M_B(B)$

$\stackrel{8.13}{\Leftrightarrow} JNF(A) = JNF(B)$ bis auf
Reihenfolge. $\square$