Eigenwerte und Eigenvektoren der JNF

8.12 Bem $J_m(\lambda) := \lambda E_m + N_m \in M(m, \mathbb{C})$

hat nur den EW λ; $a(\lambda) = m$

und $g(\lambda) = 1$.

$$J_m(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Beweis $P_{J_m(\lambda)}(z) = |J_m(\lambda) - zE_m|$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - z & 1 & & \\ & \lambda - z & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda - z \end{vmatrix} = (\lambda - z)^m$$

hat nur die NST λ, $a(\lambda) = m$.

Der ER ist $E_\lambda = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$,

denn $\operatorname{Kern}(J_m(\lambda) - \lambda E_m)$

$$= \operatorname{Kern}(N) = \operatorname{Kern} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ weil}$$

$$N \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad \square$$

Bem

Wenn $A = \begin{bmatrix} d_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$ ob. Dreiecksmatrix

dann $\{EWe\} = \{d_1 \dots d_n\}$

$$P_A(\lambda) = (d_1-\lambda)(d_2-\lambda)\cdots(d_n-\lambda)$$

$$a(\lambda) = a(d_j) = \#\{k : d_k = d_j\}$$

Bem $Bl(n_1, \dots, n_r) := \{A \in M(n, \mathbb{C}) :$

block-diagonal $\begin{bmatrix} \boxed{n_1} & & & \\ & \boxed{n_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{n_r} \end{bmatrix} \}$

$A, B \in Bl(n_1, \dots, n_r)$

$\Rightarrow$ $A + B \in Bl(n_1 \dots n_r)$, Add. blockweise

$AB \in Bl(n_1 \dots n_r)$, Mult. blockweise

A^m Potenzieren blockweise

$$\det A = \prod_{j=1}^{r} \det \text{Block}_j$$

$$\text{Kern } A = \text{Kern}(\text{Block}_1) \oplus \dots \oplus \text{Kern}(\text{Block}_r)$$

direkte Summe

$$E_\lambda(A) = E_\lambda(\text{Block}_1) \oplus \dots \oplus E_\lambda(\text{Block}_r)$$

Folgerung Die Diagonaleinträge von JNF(A) sind genau die EWe von A mit $a(\lambda) = $ Anz. λ auf der Diagonalen von JNF(A)

$g(\lambda) = \#$ JK mit EW λ.

Beachte: $A = SBS^{-1}$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(B)$$
$$\det(A-\lambda E) = \det(B-\lambda E)$$
$$P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$$
$$a_A(\lambda) = a_B(\lambda)$$
$$g_A(\lambda) = g_B(\lambda)$$

$Bu = \lambda u$, $\quad \underline{ASu} = SBS^{-1}Su$
$$= SBu$$
$$= S\lambda u$$
$$= \underline{\lambda Su}$$

Beweis

$$P_{JNF(A)}(z) = \prod_{j=1}^{r} P_{J_j}(z)$$
$$= \prod_{j=1}^{r} (\lambda_j - z)^{m_j}$$

$$a_A(z) = a_{JNF(A)}(z) = \sum_{j=1}^{r} a_{J_j}(z)$$
$$= \sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j = z}}^{r} m_j$$

$$g_A(z) = \#\{j \in \{1, \dots, r\} : \lambda_j = z\} \quad \square$$

Bspe

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{bmatrix} : \ a(2) = 4, \ g(2) = 1$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & & \\ & 2 & 0 & \\ \hline & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{array}\right] : \ a(2) = 4, \ g(2) = 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & & \\ & 2 & 1 & \\ & & 2 & 0 \\ \hline & & & 2 \end{array}\right] : \ a(2) = 4, \ g(2) = 2$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & & \\ & 2 & 0 & \\ & & 2 & 0 \\ & & & 2 \end{bmatrix} : \ a(2) = 4, \ g(2) = 4.$$