

Bestimmung der JNF

Problem Wenn $A \in M(4, \mathbb{C})$,

$$a(2) = 4, \quad g(2) = 2,$$

wie finde ich heraus, ob

$$\text{JNF}(A) = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 & 0 \\ & & & 2 \end{array} \right] \quad \text{oder} \quad \text{JNF}(A) = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \\ & 2 & 0 \\ & & 2 & 1 \\ & & & 2 \end{array} \right]$$

$3+1$ $2+2$?

Lösung 1) Ähnliche Matrizen haben gleichen Rang.

$$\begin{aligned} \text{Beweis } A &= SBS^{-1}, \quad \text{Rg } A = \dim \text{Bild } A \\ &= \dim \{ \underbrace{SBS^{-1}y}_{=:x} : y \in \mathbb{C}^n \} \\ &= \dim S \{ \underbrace{Bx}_{\text{Bild } B} : x \in \mathbb{C}^n \} \\ &= \dim \text{Bild } B = \text{Rg } B. \quad \square \end{aligned}$$

Also $\text{Rg } \text{JNF}(A) = \text{Rg } A$

2) Wenn A ähnlich B , dann ist

$A - \lambda E$ ähnlich $B - \lambda E$.

$$\underline{A - \lambda E} = SBS^{-1} - \lambda \underbrace{SES^{-1}}_E = S \underline{(B - \lambda E)} S^{-1}$$

$$\text{Also } \text{Rg}(A - \lambda E) = \text{Rg}(\text{JNF}(A) - \lambda E)$$

$$\left(\text{Bsp: } \text{Rg} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2, \text{Rg} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \right)$$

3) Wenn A ähnlich B , dann ist

$$A^k \text{ ähnlich } B^k \quad \forall k = 1, 2, 3, \dots$$

$$k \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

Beweis $A^k = (SBS^{-1})^k$

$$= SBS^{-1}BS^{-1} \dots SBS^{-1}$$

$$= SBB \dots BS^{-1} = SB^kS^{-1} \quad \square$$

$$\text{Also } \text{Rg}(A - \lambda E)^2 = \text{Rg}(\text{JNF}(A) - \lambda E)^2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = 0$$

$$e_2 \mapsto e_1 \mapsto 0 \quad \text{Rg} = 1 \quad e_2 \mapsto e_1 \mapsto 0$$

$$e_4 \mapsto e_3 \mapsto e_2$$

$$e_4 \mapsto e_3 \mapsto 0$$

$$e_4 \mapsto 0$$

Rezept zur Best. von $\text{JNF}(A)$:

Bestimme, ob $\text{Rg}(A - 2E)^2 = 0$ oder 1 ist.

Allg. betrachten wir $\text{Rg}(A - \lambda E)^k$

für $k = 1, 2, \dots$

Beachte: $\text{JNF}(A) - \lambda E$ ist blockdiag.

$$\operatorname{Rg} \left(\underbrace{J_m(\lambda) - \lambda E}_N^k = ?$$

$$N_m = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$e_m \mapsto e_{m-1} \mapsto e_{m-2} \mapsto \dots \mapsto e_2 \mapsto e_1 \mapsto 0.$$

$$N_m^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & \ddots \\ & & 0 & 0 & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$(e_m \mapsto e_{m-2}, e_k \mapsto e_{k-2}, e_2 \mapsto 0, e_1 \mapsto 0)$$

$$N_m^k$$

$$(e_j \mapsto e_{j-k} \quad \forall j > k)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\ & 0 & 0 & 1 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$N_m^m = 0 \quad \text{"nilpotent"}$$

$$\operatorname{Rg} N_m^k = m - k$$

$$\operatorname{Rg} (JNF(A) - \lambda_0 E)^k = \sum_{\lambda \neq \lambda_0} a(\lambda) + \sum_{JK(\lambda_0)} (m - k)$$

$$\operatorname{Rg}(\text{blockdiag})$$

$$= \sum_{j=1}^r \operatorname{Rg}(\text{Block}_j)$$

$$\text{Bestimme } \operatorname{Rg} (A - \lambda_0 E)^k$$

□

Bem Die Jordانبasis (die T in JNF bringt) ist im allg. nicht eind.

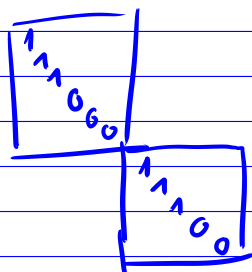
Def $v \in V \setminus \{0\}$ heißt ein Hauptvektor ("verallg. EV") von T zum EW λ , wenn

$$\cancel{v \neq 0} \quad (T - \lambda E)^k v = 0$$

für irgend ein $k=1, 2, \dots$

Der Hauptraum H_λ von T zum EW λ ist $\{0\} \cup \{\text{Hauptvektoren}\}$
 $= \bigcup_{k=1}^{\infty} \text{Kern}((T - \lambda E)^k)$.

Bem • In einer Jordانبasis $B = (e_1, \dots, e_n)$ ist $\text{Kern}((T - \lambda E)^k) =$ Aufspann derjenigen e_j , die zu einem $J_m(\lambda)$ gehören und darin e_j mit $j \leq k$ sind.



$k=3$

Proj. auf $\text{Kern}((T - \lambda E)^k)$

$$\begin{aligned} \bullet \quad (T - \lambda E)^k v = 0 &\rightarrow (T - \lambda E)^{k+1} v = 0 \\ \text{Kern}((T - \lambda E)^k) &\subseteq \text{Kern}((T - \lambda E)^{k+1}) \end{aligned}$$

- Es reicht daher für HR und HV,
 $k=1 \dots \underline{n}$,

$$\begin{aligned} \text{Kern} \left((T-\lambda E)^n \right) &= \text{Kern} \left((T-\lambda E)^{n+1} \right) \\ &= \text{Kern} \left((T-\lambda E)^{n+l} \right) \quad \forall l=1,2,\dots \end{aligned}$$

$$\text{Also } H_\lambda = \text{Kern} \left((T-\lambda E)^n \right)$$

$\Rightarrow H_\lambda$ ist UR von V .

- Eine Jordantesis enthält nur Hauptvektoren.