Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2020
29. Juni 2020

Lineare Algebra 1: Übungsblatt 10

Aufgabe 38: Paralleler und senkrechter Anteil (25 Punkte)

a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt, $W \subseteq V$ ein Unterraum und $v \in V$ beliebig. Wir betrachten Zerlegungen der Form $v = v_{||} + v_\perp$ mit $v_{||} \in W$ und $\langle w, v_\perp\rangle = 0$ für alle $w \in W$. Zeigen Sie, dass diese Zerlegung für jedes $v \in V$ eindeutig ist (es also nicht mehr als eine Möglichkeit für $v_{||}$ und $v_\perp$ geben kann). Die Existenz der Zerlegung für endlich-dimensionales W wird in der Vorlesung gezeigt.

b) Der Vektor $w \in \mathbb{R}^n\setminus\{0\}$, $n > 1$, definiere nun den Unterraum W durch $W := \operatorname{span}\{w\} \subset \mathbb{R}^n$. Außerdem sei $v \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Finden Sie Formeln für $v_{||}$ und $v_\perp$ in Begriffen von v und w.

c) Auf $\mathbb{R}^3$ betrachten wir das Skalarprodukt $\langle u, v\rangle = \sum_i u_i\, v_i$. Sei $W := \operatorname{span}\{(1, 0, 3)\} \subset \mathbb{R}^3$ und $v := (2, 5, 6) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $v_{||}$ und $v_\perp$.

Aufgabe 39: Projektion (35 Punkte; Teamaufgabe)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension $n < \infty$, und seien V_1, V_2 Unterräume mit $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ und $V_1 + V_2 = V$.

a) Zeigen Sie, dass jedes $v \in V$ sich auf eindeutige Weise als $v = v_1 + v_2$ mit $v_1 \in V_1$ und $v_2 \in V_2$ schreiben lässt. Man bezeichnet daher $P(v) := v_1$ als Projektion von v auf V_1 entlang V_2.

b) Zeigen Sie, dass $P^2 = P$.

c) Zeigen Sie, dass $V_1 = \operatorname{Bild} P$ und $V_2 = \operatorname{Kern} P$. (Insbesondere kann man V_1 und V_2 aus P bestimmen.)

d) Zeigen Sie umgekehrt, dass es für jeden Endomorphismus $P \in \mathcal{L}(V)$ mit $P^2 = P$ Unterräume V_1 und V_2 gibt mit $V_1 \cap V_2 = \{0\}$, $V_1 + V_2 = V$ und $P(v) = v_1$.

e) Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf V, V_1 ein Unterraum und $V_2 = V_1^\perp$. Zeigen Sie, dass $V_1 \cap V_2 = \{0\}$. In der Vorlesung wird gezeigt, dass $V_1 + V_2 = V$. Man bezeichnet in diesem Fall P als orthogonale Projektion.

f) Zeigen Sie unter den Voraussetzungen von e) weiter, dass $\langle u, Pv\rangle = \langle Pu, v\rangle\ \forall u, v \in V$.

g) Zeigen Sie umgekehrt, dass für jede Projektion P mit $\langle u, Pv\rangle = \langle Pu, v\rangle\ \forall u, v \in V$ gilt: $V_2 \subseteq V_1^\perp$. (Wegen $\dim V_1^\perp = n - \dim V_1$ folgt daraus weiter, dass $V_2 = V_1^\perp$.)

Hinweis: Teile dieser Aufgabe sind verwandt mit Aufgabe 16 von Blatt 4.

Aufgabe 40: Gram-Schmidt-Verfahren (20 Punkte)

Zeigen Sie, dass auf dem $\mathbb{R}^2$ durch $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right\rangle := 2a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_1 + 3a_2b_2$$

ein Skalarprodukt definiert wird.

Führen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren für die Vektoren $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und das oben definierte Skalarprodukt durch.

Aufgabe 41: Fibonacci-Zahlen (20 Punkte; Teamaufgabe)

Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und die Rekursionsvorschrift $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Hinweis: Es gilt

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diagonalisieren Sie A, um A^n zu berechnen.

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Mittwoch, 8.7.2020.