Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2020
4. Mai 2020

Lineare Algebra 1: Übungsblatt 3

Aufgabe 9: Endliche Vektorräume (10 Punkte)

Konstruieren Sie einen Vektorraum V mit 42 Elementen über dem Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, oder zeigen Sie, dass dies unmöglich ist.

Aufgabe 10: Komposition linearer Abbildungen (10 Punkte)

Es seien U, V, W Vektorräume über dem Körper $\mathbb{K}$ und $T : U \to V$ sowie $S : V \to W$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass die Abbildung $S \circ T : U \to W$ linear ist.

Aufgabe 11: Linear unabhängige Funktionen (25 Punkte; Teamaufgabe)

Gegeben seien die drei Funktionen $f, g, h : (0,1) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = 3\ln(x), \quad h(x) = 4\ln(x\mathrm{e}^x).$$

Sind diese als Elemente des Vektorraums $\mathbb{R}^{(0,1)}$ der Abbildungen von $(0,1)$ nach $\mathbb{R}$ linear unabhängig?

Aufgabe 12: Basen (30 Punkte)

(a) Gegeben sei der Unterraum $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 = x_3\} \subset \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie eine Basis von U, d.h. geben Sie eine Menge B von Vektoren an und zeigen Sie, dass B eine Basis von U ist.

(b) Es sei $P_{\mathbb{R}}^{(4)}$ der Vektorraum der Polynome vom Grade höchstens 4. Es seien $q_i \in P_{\mathbb{R}}^{(4)}$ gegeben durch $q_1(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, $q_2(x) = x^3$ und $q_3(x) = x - 1$. Ergänzen Sie $\{q_1, q_2, q_3\}$ zu einer Basis von $P_{\mathbb{R}}^{(4)}$, d.h. finden Sie $q_4, q_5 \in P_{\mathbb{R}}^{(4)}$, so dass $\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$ eine Basis von $P_{\mathbb{R}}^{(4)}$ bildet (mit Beweis, dass es sich um eine Basis handelt).

Aufgabe 13: Direkte Summe von Vektorräumen (25 Punkte; Teamaufgabe)

Seien zwei Vektorräume V und W über $\mathbb{K}$ gegeben, mit $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Das cartesische Produkt $V \times W$ wird durch die Verknüpfungen

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2)\,, \quad \lambda \cdot (v, w) := (\lambda v, \lambda w)$$

ebenfalls zu einem $\mathbb{K}$-Vektorraum, der die direkte Summe $V \oplus W$ heißt.
Zeigen Sie, dass $\dim(V \oplus W) = n + m$ gilt.

Abgabe: Bitte laden Sie Ihre Lösung bis 16:00 Uhr am Mittwoch den 13.05.2020 auf `https://urm.math.uni-tuebingen.de` hoch.

Vokabeln: Repräsentant = representative, paarweise disjunkt = pairwise disjoint, cartesisches Produkt = Cartesian product, Paar = pair oder couple, Tripel = triple, n-Tupel = n-tuple, Vektorraum = vector space, Assoziativgesetz = associative law, Kommutativgesetz = commutative law, Distributivgesetz = distributive law, Skalar = scalar [skäjlar], Unterraum = subspace, Linearkombination = linear combination, Aufspann oder Spann oder lineare Hülle = span oder linear hull, Erzeugendensystem = generating system oder spanning system, Koeffizient = coefficient [kou-effischent], linear unabhängig = linearly independent, Basis (Plural Basen) = basis [bäj-ßis] (plural bases [bäj-ßies]), Abbildung = mapping, Definitionsbereich (einer Funktion) = domain of definition oder domain.