

## LINEARE ALGEBRA 1: ÜBUNGSBLATT 6

### Aufgabe 21: Matrizen invertieren (25 Punkte)

Invertieren Sie die folgenden Matrizen mit dem Gauß-Jordan-Verfahren. Geben Sie explizit an, für welche Werte des Parameters  $\lambda \in \mathbb{C}$  dies möglich ist.

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \quad (b) \quad B = \begin{pmatrix} i\lambda & -1 & i\lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & i & \lambda \end{pmatrix}$$

### Aufgabe 22: Ein lineares Gleichungssystem (25 Punkte)

Benutzen Sie das Gaußsche Eliminationsverfahren, um die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems  $Ax = b$  zu bestimmen mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 9 \\ -1 & -4 & 2 & 11 \\ -2 & -8 & 0 & 6 \\ -3 & -12 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 23: Keplersche Fassregel (25 Punkte; Teamaufgabe)

Johannes Kepler gab 1615 in seiner *Nova steriometria* eine Formel für den Inhalt von Weinfässern an, die auf folgender Näherungsmethode beruht: Zur näherungsweise Berechnung von  $\int_a^b f(x) dx$  betrachten wir die Stützstellen  $x_0 = a$ ,  $x_1 = (a + b)/2$  und  $x_2 = b$  und setzen  $y_k = f(x_k)$  für  $k = 0, 1, 2$ . Bestimmen Sie das zugehörige Interpolationspolynom  $p$  und zeigen Sie

$$\int_a^b p(x) dx = \frac{b-a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

### Aufgabe 24: Methode der kleinsten Quadrate (25 Punkte; Teamaufgabe)

Bestimmen Sie mit der Methode der kleinsten Quadrate die Ausgleichsgerade durch die folgenden Punkte im  $\mathbb{R}^2$ :  $(0, 2)$ ,  $(3, 8)$ ,  $(4, 9)$ ,  $(1, 5)$ .

### Aufgabe 25: (freiwillig) Eschers Treppe (40 Bonuspunkte)

Zeichnen Sie Eschers unmögliche Treppe (Abb. 1) nach, wie in Abb. 2.

Vorbemerkung: Während Escher Zentralperspektive benutzt hat, benutzen wir die (einfachere) Parallelperspektive. Was ist das? Die Zentralperspektive ist die korrekte Art des Abbildens (wie beim Auge oder Foto): Wir benutzen ein Koordinatensystem im  $\mathbb{R}^3$  mit dem Ursprung am Ort des Beobachters und dem Bild in der Ebene  $x_1 = 1$ . Ein Objekt (oder ein Punkt eines Objekts) am Ort  $u = (u_1, u_2, u_3)$  mit  $u_1 > 0$  wird abgebildet auf denjenigen Punkt in der Bildebene, der vom Beobachter aus gesehen in derselben Richtung liegt wie das Objekt, also  $g_z(u) = u_1^{-1}u = (1, u_2/u_1, u_3/u_1)$ ; die relevanten Koordinaten im Bild sind  $f_z(u) = (u_2/u_1, u_3/u_1) \in \mathbb{R}^2$ . Bei der

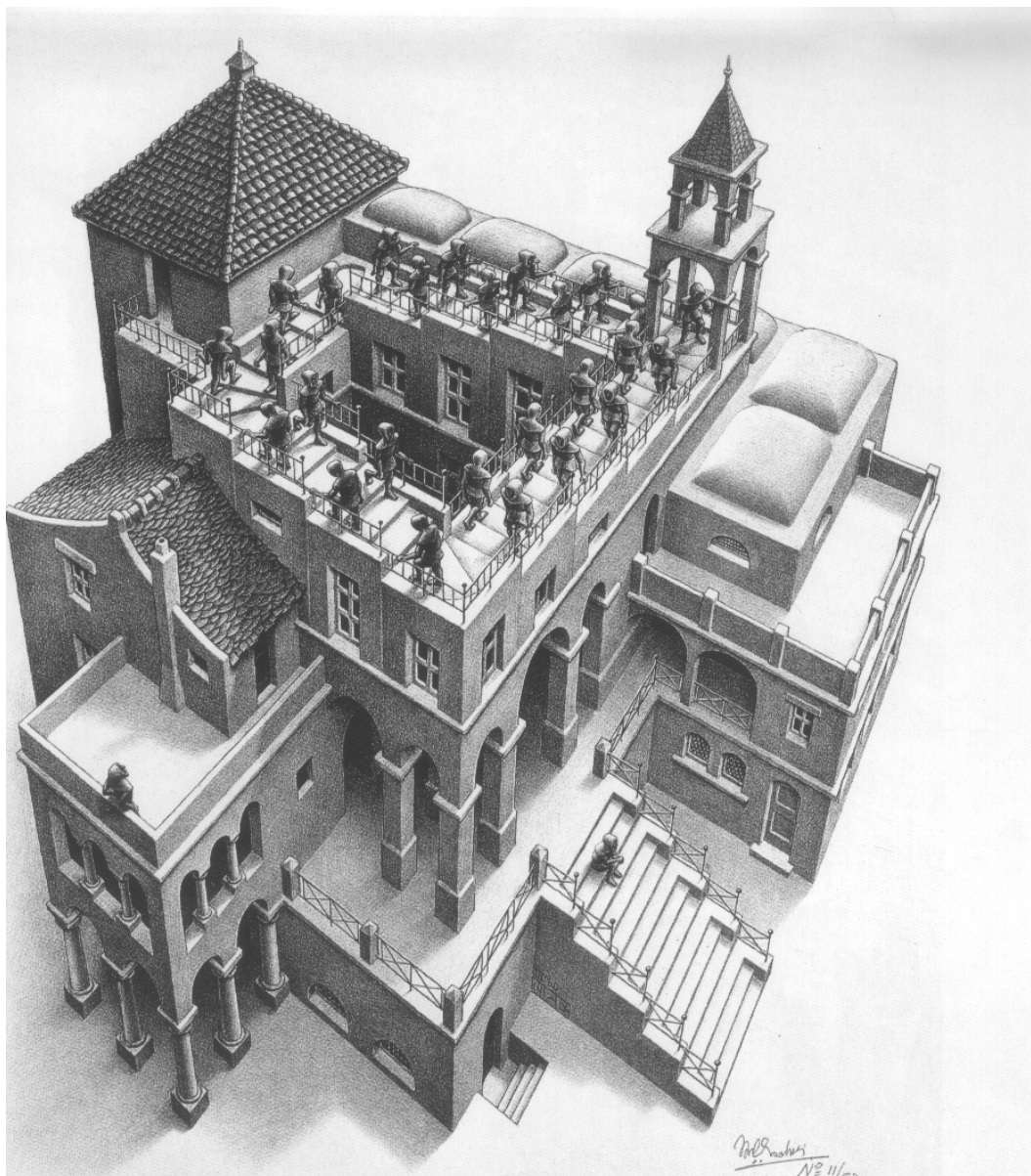


Abbildung 1: M. C. Escher (1898–1972), “Treppauf und treppab”, Lithografie (1960).

Parallelperspektive hingegen bildet man den Punkt  $u$  auf  $g_p(u) = (1, u_2, u_3)$  ab; die relevanten Koordinaten sind  $f_p(u) = (u_2, u_3) \in \mathbb{R}^2$ . Die Parallelperspektive ist immer dann näherungsweise korrekt (bis auf eine zentrische Streckung), wenn sich die  $u_1$ -Werte der abgebildeten Objekte nicht stark unterscheiden. Während die Abbilder paralleler Geraden in der Zentralperspektive “zusammenlaufen”, sind sie in der Parallelperspektive parallel. Noch etwas: Ein *Polygonzug* ist eine Aneinanderreihung gerader Strecken, von denen jede am Endpunkt der vorigen beginnt (wie z.B. in Abb. 2).

Anleitung zur Aufgabe: Wir verfolgen nur die Außenkante der Stufen und fassen (wie das Gelände in Eschers Bild) je drei Stufen zu einem Element zusammen. Wir betrachten drei Einheitsvektoren  $e_x, e_y, e_z \in \mathbb{R}^3$ , von denen je zwei senkrecht aufeinander stehen; diese Vektoren repräsentieren die drei Achsen des Gebäudes in Abb. 1. Wir setzen  $v_x = f_p(e_x), v_y = f_p(e_y), v_z = f_p(e_z)$ . Kennen wir von einem Punkt  $u$  das Abbild  $f_p(u)$ , so finden wir  $f_p(u + \lambda e_x) = f_p(u) + \lambda v_x$  und entsprechend für  $e_y, e_z$ .

Der Trick an der unmöglichen Treppe besteht darin, dass ein Polygonzug im  $\mathbb{R}^3$ , der eine Treppe

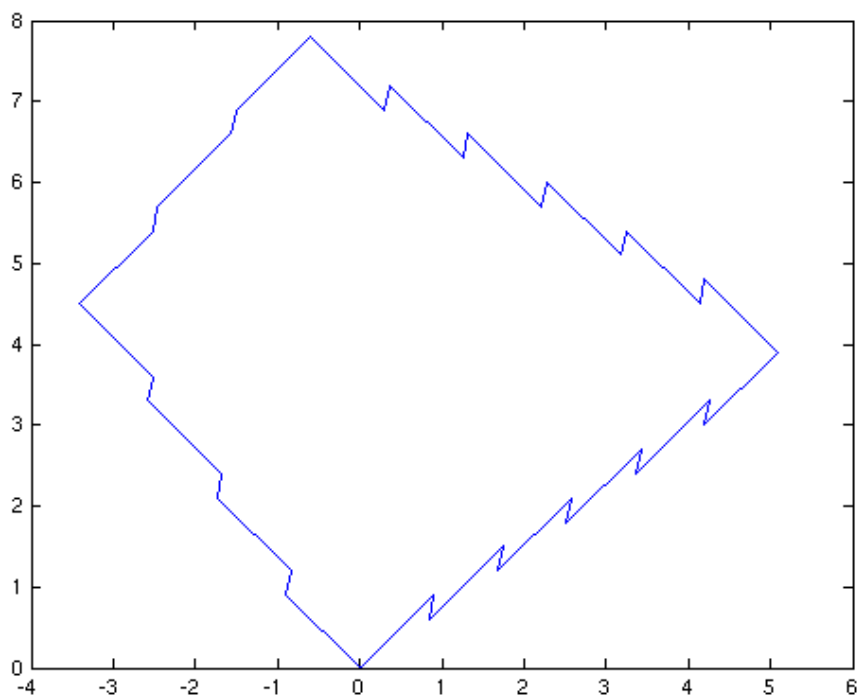


Abbildung 2: Außenkante der Treppe als Polygonzug.

entlang stets abwärts führt, unmöglich wieder am Ausgangspunkt ankommen kann, während sein Abbild sehr wohl am Abbild des Ausgangspunkts enden kann und daher in  $\mathbb{R}^2$  einen geschlossenen Polygonzug bildet. Ist jede Stufe 10 cm hoch und 30 cm lang, dann ist jedes Stufenelement  $\mu = 30$  cm hoch und  $\lambda = 90$  cm lang. Der Weg im  $\mathbb{R}^3$  entlang der Außenkante, an der dem Betrachter zugewandten Ecke beginnend, legt also zunächst die Strecke  $\lambda$  in  $x$ -Richtung zurück, dann  $-\mu$  in  $z$ -Richtung, dann wieder  $\lambda$  in  $x$ -Richtung etc. (für die 6 Stufenelemente 6 mal  $\lambda$  in  $x$ -Richtung und 5 mal  $-\mu$  in  $z$ -Richtung); dann  $\lambda$  in  $y$ -Richtung,  $-\mu$  in  $z$ -Richtung etc. (6 Stufenelemente); dann  $-\lambda$  in  $x$ -Richtung,  $-\mu$  in  $z$ -Richtung (3 Stufenelemente); dann  $-\lambda$  in  $y$ -Richtung,  $-\mu$  in  $z$ -Richtung (4 Stufenelemente). Damit das Abbild dieses Weges geschlossen ist, muss in  $\mathbb{R}^2$  gelten

$$6\lambda v_x - 5\mu v_z + 6\lambda v_y - 5\mu v_z - 3\lambda v_x - 2\mu v_z - 4\lambda v_y - 3\mu v_z = 0.$$

Wählen Sie Vektoren  $v_x, v_y, v_z \in \mathbb{R}^2$  (zwei ausgesucht, der dritte aus der Gleichung bestimmt), die Eschers Bild einigermaßen nahekommen, und schreiben Sie ein Computer-Programm (in einer selbstgewählten Sprache, oder mit Hilfe einer Mathe-Software wie Matlab (kostenlos über das ZDV zu erhalten) oder Maple), das das Abbild des Weges in  $\mathbb{R}^2$  plottet. Bitte geben Sie neben Ihrem Plot einen Ausdruck Ihres Quellcodes ab.

**Vokabeln:** Formel = formula (Plural formulae oder formulas), Annahme = assumption, Voraussetzung (eines Satzes) = hypothesis [haipo(th)esis] (Plural hypotheses [haipo(th)esies]), elementare Zeilenumformung = elementary row operation, ähnliche Matrizen = similar matrices, Zeilenstufenform = row echelon [eschelon] form, nach  $x$  auflösen = solve for  $x$ , lösbar = solvable, eindeutig lösbar = uniquely solvable, universell lösbar = universally solvable, obere Dreiecksmatrix = upper triangular matrix, affiner Unterraum = affine [effain] subspace, Gaußsches Eliminationsverfahren = Gaussian elimination algorithm, Methode der kleinsten Quadrate = method of least squares.

**Abgabe:** Bis 16:00 Uhr am Mittwoch den 10.06.2020.