Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2020
8. Juni 2020

# Lineare Algebra 1: Übungsblatt 7

**Aufgabe 26: Determinanten** (20 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen. Welche sind folglich invertierbar?

a) Die der Drehmatrix $R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$,

b) Die von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 9 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 17 \\ 4 & 0 & 11 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 8 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & 6 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 27: Signum einer Permutation** (25 Punkte; Teamaufgabe)

Eine bijektive Abbildung $\pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ nennt man eine Permutation; die Menge $S_n$ aller Permutationen bildet mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe, genannt die symmetrische Gruppe oder Permutationsgruppe.

a) Wir definieren für jedes $\pi \in S_n$ einen Endomorphismus $L_\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch

$$L_\pi(x_1, \ldots, x_n) = (x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}).$$

Welche Werte kann $\operatorname{sgn}(\pi) := \det(L_\pi)$ ("Signum von $\pi$") annehmen?

b) Welchen Wert hat $\operatorname{sgn}(\sigma_{ij})$, wobei

$$\sigma_{ij}(k) = \begin{cases} k & \text{falls } k \notin \{i, j\} \\ j & \text{falls } k = i \\ i & \text{falls } k = j \end{cases}$$

die Transposition von $i$ und $j$ mit $i \neq j$ ist?

c) Seien $\pi_1, \pi_2 \in S_n$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{sgn}(\pi_2 \circ \pi_1) = \operatorname{sgn}(\pi_2) \operatorname{sgn}(\pi_1)$.

**Aufgabe 28: Determinanten und Zeilenstufenform** (30 Punkte)

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach $n$, dass die Determinante einer oberen oder unteren Dreiecksmatrix durch das Produkt der Diagonaleinträge gegeben ist, d.h.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & & 0 \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(b) Wie verändert sich der Wert einer Determinante bei elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen?
Berechnen Sie die folgende Determinante, indem Sie sie durch Zeilen- und Spaltenumformungen auf diagonale Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & -3 \\ 2 & -2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

**Aufgabe 29: Nochmal Permutationen** (25 Punkte; Teamaufgabe)

Folgendes Problem trat letztens in meiner Forschung über Quantenmechanik auf. Ein Unterraum $U$ von $\mathbb{K}^n$ heiße *permutations-invariant*, wenn mit jedem Vektor $(x_1, \dots, x_n) \in U$ auch $(x_{\pi(1)}, \dots, x_{\pi(n)}) \in U$ ist für jede Permutation $\pi \in S_n$. Zeigen Sie: Ist $U$ ein permutations-invarianter Unterraum des $\mathbb{K}^n$, der den Vektor $c := (1, 1, 1, \dots, 1)$ enthält, dann ist entweder $U = \operatorname{span}(c) = \mathbb{K}c$ oder $U = \mathbb{K}^n$.

**Vokabeln:** Mittelwert = mean (value), $n$ Fakultät = $n$ factorial, Determinante = determinant, nach der ersten Spalte entwickeln = to expand along the first column, alternierende Multilinearform = alternating multilinear form, Signum einer Permutation = sign of a permutation, Lösung = solution, rechter Winkel = right angle, Rechteck = rectangle, Dreieck = triangle, Rechenaufwand = computational cost, Näherung = approximation, Rauminhalt = volume, Flächeninhalt = area, Zylinder = cylinder, Kegel = cone, Kegelschnitt (d.h., Ellipse, Parabel oder Hyperbel) = conic section, Ellipse = ellipse, Parabel = parabola, Hyperbel = hyperbola.

**Abgabe:** Bis 16:00 Uhr am Mittwoch den 17.06.2020.