Prof. Dr. Roderich Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2020
15. Juni 2020

Lineare Algebra 1: Übungsblatt 8

Aufgabe 30: Leibnizsche Formel (30 Punkte; Teamaufgabe)

Beweisen Sie die Leibnizsche Formel für die Determinante einer Matrix $A \in M(n, \mathbb{K})$, $A = (a_{ij})$,

$$\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) a_{1\pi(1)} \cdots a_{n\pi(n)}. \tag{1}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die rechte Seite eine Determinantenform definiert. Dazu kann es nutzen, zuerst zu zeigen, dass die rechte Seite übereinstimmt mit

$$\sum_{\rho \in S_n} \operatorname{sgn}(\rho) a_{\rho(1)1} \cdots a_{\rho(n)n}. \tag{2}$$

Aufgabe 31: Rechenaufwand (30 Punkte; Teamaufgabe)

Determinanten von $n \times n$ Matrizen können auf unterschiedliche Art und Weise berechnet werden, und manche Verfahren sind effizienter als andere. Als Schätzwert für die Laufzeit betrachten wir die Anzahl der erforderlichen Multiplikationen. Die Überführung in Zeilenstufenform mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren (siehe Aufgabe 28) erfordert (ungefähr) $n^3/3$ Multiplikationen; da man danach noch die Diagonaleinträge mit einander multiplizieren muss, kostet also diese Methode zur Berechnung der Determinante $E(n) = \frac{n^3}{3} + n - 1$ Multiplikationen. (Für eine typische Matrix sind alle Diagonaleinträge nach der Überführung $\neq 0$.)

a) Bestimmen Sie (mit Begründung!) eine Rekursionsformel für die Anzahl $L(n)$ der benötigten Multiplikationen, um die Determinante mithilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes (siehe Satz 4.4 c)) zu berechnen.

b) Bestimmen Sie (mit Begründung!) die Anzahl $P(n)$ der benötigten Multiplikationen, um die Determinante mit Hilfe der Leibnizschen Formel (siehe Aufgabe 30) zu berechnen.

c) Erstellen Sie eine Tabelle, in der Sie über n die Werte $E(n)$, $L(n)$ und $P(n)$ für $n = 2, \ldots, 8$ auftragen. Ab welchem $n \in \mathbb{N}$ lohnt sich das Vorgehen mithilfe des Eliminationsverfahrens?

Aufgabe 32: Die Spur (40 Punkte)

Die Spur einer $n \times n$-Matrix A ist definiert durch

$$\operatorname{Spur} A = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

a) Geben Sie ein Beispiel für $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ an mit $\operatorname{Spur}(AB) \neq \operatorname{Spur}(A) \cdot \operatorname{Spur}(B)$.

b) Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in M(n, \mathbb{K})$ gilt $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$.

c) Folgern Sie aus b), dass ähnliche Matrizen und somit alle Matrixdarstellungen eines Endomorphismus $L : V \to V$ dieselbe Spur haben, die wir dann ebenfalls mit $\operatorname{Spur} L$ bezeichnen.

(Bitte wenden!)

d) Seien nun m Matrizen $A_1, \dots, A_m \in M(n, \mathbb{K})$ gegeben. Folgern Sie aus b), dass

$$\operatorname{Spur}(A_1 A_2 \cdots A_m) = \operatorname{Spur}(A_m A_1 \cdots A_{m-1}).$$

Man sagt dazu, die Spur sei invariant unter zyklischer Vertauschung der Faktoren.

e) Die Pauli-Matrizen sind definiert durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei $\pi \in S_3$ eine Permutation von $\{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass

$$\sigma_{\pi(1)} \sigma_{\pi(2)} = i \operatorname{sgn}(\pi)\, \sigma_{\pi(3)}.$$

f) Zeigen Sie mittels e), dass es 2×2-Matrizen A, B, C gibt mit der Eigenschaft

$$\operatorname{Spur}(ABC) \neq \operatorname{Spur}(BAC).$$

Die Spur ist also nicht invariant unter *allen* Vertauschungen der Faktoren.

Abgabe: Bis 16:00 Uhr am Mittwoch 24.6.2020.