Prof. Dr. R. Tumulka
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2020
13.7.2020

Übungsklausur zur Linearen Algebra 1

Informationen zur Klausur: Wenn Sie das Modul "Mathematik für Physiker 2" studieren (Studiengang B.Sc. Physik), dann nehmen Sie an der Klausur auf dem Campus teil, und zwar im Hörsaalzentrum auf der Morgenstelle in Hörsaal N4, wenn Ihr Nachname mit A–F beginnt, und in Hörsaal N6 für G–Z. Bitte tragen Sie auf dem Campus eine Mund-Nasen-Maske (die Sie während der Klausur ablegen können) und achten Sie darauf, Abstand zu halten. Wenn Sie im Studiengang B.Sc. Mathematik oder B.Ed. Mathematik studieren, nehmen Sie am Test (= Online-Klausur) teil. Sowohl Klausur als auch Test finden am Montag, 27.7.2020, 12:30–14:30 Uhr statt. Den Test bearbeiten Sie handschriftlich auf Papier und laden Ihre Lösung bis 15:00 Uhr als PDF hoch.

Ihr Übungsleiter teilt Ihnen mit, ob Sie zur Klausur/zum Test zugelassen sind. Bitte melden Sie sich auf `http://urm.math.uni-tuebingen.de` UND auf `http://alma.uni-tuebingen.de` zur Klausur bzw. zum Test an. (Die Uhrzeit ist auf Alma mit 12–15 Uhr angegeben; das macht nichts. Falls Alma Sie für den Test nach einem Hörsaal fragt, obwohl der Test online stattfindet, geben Sie einfach N4 an.) Im Falle des Nicht-Bestehens der Klausur/des Tests haben Sie die Möglichkeit, an der Nachklausur/dem Nachtest am Dienstag, 29.9.2020 um 13:30 Uhr teilzunehmen.

Bücher, Notizen und elektronische Hilfsmittel sind bei der Klausur/dem Test nicht erlaubt. Ich muss Sie darauf hinweisen, dass bei der Klausur/dem Test Abschreiben und unerlaubte Kommunikation mit anderen Teilnehmern Verletzungen der akademischen Integrität darstellen und schwerwiegende Konsequenzen haben können. Der Stoff der Klausur/des Tests besteht aus Kapitel 1–7 aus dem Skript und den Übungsblättern 1–11. Alle Fakten, die in der Vorlesung erwähnt wurden, dürfen ohne Beweis benutzt werden.

Anleitung zu dieser Übungsklausur: Sie können die Aufgaben zu Hause lösen; sie werden nicht korrigiert. Die Punktzahlen addieren sich zu 100. Diese Übungsklausur ist länger als die echte Klausur. Es ist vorgesehen, dass Sie keine Bücher, Notizen oder elektronische Hilfsmittel benutzen.

Hinweise für die Klausur:

- Eine unübersichtliche, unklare oder unleserliche Darstellung kann zu Punktabzug führen.
- Streichen Sie falsche oder irreführende Teile Ihres Aufschriebs, die nicht bewertet werden sollen, deutlich durch.

Aufgabe 1: Wahr oder falsch? (12 Punkte)

Kreuzen Sie $\boxed{\text{W}}$ an, wenn die Aussage wahr ist und $\boxed{\text{F}}$, wenn die Aussage falsch ist. Ein richtig gesetztes Kreuz gibt 1 Punkt, kein Kreuz gibt 0 Punkte und ein falsch gesetztes Kreuz gibt -1 Punkt. Insgesamt wird die Aufgabe mit mindestens 0 Punkten bewertet. Sie brauchen keine Begründungen anzugeben.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Jeder Vektorraum hat eine endliche Basis.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Anzahl der Elemente eines $\mathbb{Z}_2$-Vektorraums ist stets entweder ∞ oder eine Zweierpotenz.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind linear unabhängig, wenn jede Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ die Null ergibt.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Ein lineares Gleichungssystem mit 4 Unbekannten, dessen Koeffizientenmatrix A Rang 3 hat, kann unendlich viele Lösungen haben.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Wenn S und R orthogonal sind, dann auch $S + R$.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Wenn A symmetrisch und positiv definit ist, dann auch A^{-1}.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Wenn A symmetrisch und positiv definit ist, dann auch A^2.

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ Wenn das charakteristische Polynom von A die Form $P_A(\lambda) = (1 - \lambda)^n$ hat, dann ist $A = E$.

Welche der folgenden Aussagen sind für beliebige Matrizen $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ korrekt?

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det(A + B) = \det A + \det B$

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det(AB) = \det(BA)$

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det(A^T) = \det(A)$

$\boxed{\text{W}}$ $\boxed{\text{F}}$ $\det(2A) = 2\det(A)$

Aufgabe 2: Wahr oder falsch? (12 Punkte)

Wenn wahr, geben Sie eine Begründung; wenn falsch, geben Sie ein Gegenbeispiel.

a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ für alle reellen 2×2-Matrizen A, B.

b) Wenn $A \in M(n, \mathbb{R})$ regulär ist und $B \in M(n, \mathbb{R})$ singulär, dann ist $A + B$ regulär.

c) Die Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix.

d) Wenn $A \in M(n, \mathbb{C})$ reelle Eigenwerte und eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren besitzt, dann ist A selbst-adjungiert.

Aufgabe 3: Matrix-Multiplikation (2 Punkte)

Finden Sie ein Beispiel einer 2×2-Matrix $A \neq 0$, so dass $A^2 = 0$.

Aufgabe 4: Inverse Matrix (6 Punkte)

Sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ c & b & 1 \end{bmatrix}$, wobei a, b, c Parameter sind.

Berechnen Sie A^{-1} nach dem Gauß-Jordan-Verfahren. Überprüfen Sie Ihre Antwort, indem Sie $A^{-1}A$ berechnen.

Aufgabe 5: Zeilenumformung (6 Punkte)

Für jede der angegebenen Matrizen: Kann man sie aus $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ durch eine *einzelne* elementare Zeilenumformung erhalten?

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
☐ ja	☐ ja	☐ ja	☐ ja	☐ ja	☐ ja
☐ nein	☐ nein	☐ nein	☐ nein	☐ nein	☐ nein

Aufgabe 6: Determinante (4 Punkte)

Sei $R = \begin{bmatrix} a & u & w \\ 0 & b & v \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, wobei $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ und u, v, w reelle Zahlen sind. Sei $A = R^T R$.

Benutzen Sie Eigenschaften der Determinante, um $\det(A)$ durch a, b, c, u, v, w auszudrücken.

Aufgabe 7: Lineare Abhängigkeit (4 Punkte)

a) Ist die folgende Menge linear abhängig oder unabhängig in $\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

b) Gibt es eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$L \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

(Beachten Sie, dass es sich um dieselben Vektoren wie bei Teil a) handelt.) Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8: Gauß-Verfahren (6 Punkte)

Benutzen Sie elementare Zeilenumformungen nach dem Gaußschen Eliminationsverfahren, um die gegebene Matrix in allgemeine Zeilenstufenform zu bringen. Welchen Rang hat die Matrix? Geben Sie jeweils im Kästchen an, welche Zeilenumformung Sie verwenden (z.B. R_3+3R_2 oder $R_1 \leftrightarrow R_4$). (Die Zahl der Schritte kann geringer sein als die der eingezeichneten Felder für Matrizen.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9: Reguläre Matrix (2 Punkte)

Formulieren Sie die Definition von “regulär”. (Es reicht dabei nicht, einen Begriff anzugeben, der synonym ist mit “regulär”. Sie dürfen Symbole wie $\exists$ verwenden.) Eine Matrix $A \in M(n, \mathbb{K})$ heißt regulär, wenn folgendes gilt:

Aufgabe 10: Beweis (12 Punkte)

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\dim V = n$ und $U \subset V$ ein Unterraum mit $\dim U = n-1$. Zeigen Sie:

$$\text{Ist } W \text{ ein Unterraum von } V \text{, so ist } \dim(W \cap U) \geq \dim W - 1.$$

Aufgabe 11: Matrix-Darstellung eines Endomorphismus (4 Punkte)

Sei $P_{\mathbb{R}}^{(n)}$ der Vektorraum aller reellen Polynome $p(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ vom Grade $\leq n$. Sei L die lineare Abbildung von $P_{\mathbb{R}}^{(1)}$ nach $P_{\mathbb{R}}^{(2)}$ gegeben durch

$$Lp(x) = 3x^2 \frac{d}{dx} p(x) + (4x+5)p(x).$$

Bestimmen Sie die 3×2-Matrix $A = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(L)$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = (1, x)$ von $P_{\mathbb{R}}^{(1)}$ und der Basis $\mathcal{B} = (1, x, x^2)$ von $P_{\mathbb{R}}^{(2)}$.

Aufgabe 12: Gram-Schmidt-Verfahren (6 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

(b) Orthonormieren Sie die kanonische Basis (e_1, e_2, e_3) des $\mathbb{R}^3$ bzgl. des Skalarprodukts $S_A(x, y) := \langle x, Ay \rangle$ unter Verwendung des Gram-Schmidt-Verfahrens, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das kanonische Skalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ bezeichne.

Aufgabe 13: Komplexe Matrizen (4 Punkte)

Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$. Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?

☐ A ist selbstadjungiert

☐ A ist eine Projektion

☐ A ist unitär

☐ A ist invertierbar

Aufgabe 14: Duale Basis (4 Punkte)

Die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^2$.

Bestimmen Sie die duale Basis $\hat{v}_1, \hat{v}_2$. (Schreiben Sie dabei $\hat{v}_1$ und $\hat{v}_2$ als Zeilenvektoren.)

Aufgabe 15: Kleinste Quadrate (4 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für (z.B.) $A \in M(3 \times 2, \mathbb{R})$ die orthogonale Projektion P von $\mathbb{R}^3$ auf Bild A durch $P = A(A^T A)^{-1} A^T$ gegeben ist, sofern $A^T A$ invertierbar ist.

(a) Seien $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Verifizieren Sie, dass hier $A^T A$ invertierbar ist, und berechnen Sie P und Py. Erläutern Sie, warum das Ergebnis zeigt, dass die Gleichung $Ax = y$ keine Lösung $x \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

(b) Bestimmen Sie den Vektor u in $\mathbb{R}^2$, für den $||Au - y|| = \min_{x \in \mathbb{R}^2} ||Ax - y||$, und berechnen Sie $||Au - y||$.

Aufgabe 16: Diagonalisierung rückwärts (6 Punkte)

Über eine Matrix $A \in M(2, \mathbb{R})$ wissen wir, dass sie die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 0$ hat und die zugehörigen Eigenvektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wieso wissen Sie dann, dass A symmetrisch ist?
(b) Bestimmen Sie die Determinante und die Spur von A, ohne A zu berechnen. Begründen Sie Ihre Antwort.
(c) Berechnen Sie A.

Aufgabe 17: Differenzialgleichung (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösung der Differenzialgleichung

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

mit der Anfangsbedingung

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$