Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2020
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 16.04.20

8.1 Uneigentliche Integrale

Wir definieren

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{1}$$

falls $\int_a^b \ldots$ für beliebig große b existiert.

Beispiel:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \qquad \texttt{https://youtu.be/H4H2w1F9-fg}\ \text{(7min)} \tag{2}$$

Überlegen Sie selbst: Haben die folgenden Integrale einen endlichen Wert?

$$\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,, \quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}\,, \quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/4}}\,, \quad \int_1^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^{4/3}} \tag{3}$$

Falls $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \pm\infty$, definieren wir analog $(a < b)$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{y\to b-} \int_a^y f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

Beispiel:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \qquad \texttt{https://youtu.be/hv02pdYUwmU}\ \text{(7min)} \tag{5}$$

Überlegen Sie selbst: Haben die folgenden Integrale einen endlichen Wert?

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^2}\,, \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/4}}\,, \quad \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \tag{6}$$

Liegt die problematische Stelle mitten im Integrationsintervall, so erzeugt dies typischerweise *zwei* Limites.

Beispiel:

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{\sqrt{|x|}}\,\mathrm{d}x \qquad \texttt{https://youtu.be/oV5JGGuo-XI}\ \text{(6min)} \tag{7}$$

8.2 Partialbruchzerlegung

Beispiel:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+x}\,\mathrm{d}x \qquad \texttt{https://youtu.be/e1AqVgE33SA}\ (4\,\mathrm{min}) \tag{8}$$

OK, das hat geklappt. Aber wie kommen wir (oder die Feen) auf diese Zerlegung?

$$\frac{1}{x^2+x} = \dots \qquad \texttt{https://youtu.be/v-KQCTDnpXw}\ (3\,\mathrm{min}) \tag{9}$$

Zerlegen Sie selbst:

$$\frac{2x^2-3x-3}{x^3-x} = \dots \tag{10}$$

Noch schneller geht's mit der *Zuhaltemethode!*

$$\texttt{https://youtu.be/e2b4pOOR0jk}\ (5\,\mathrm{min}) \tag{11}$$

Und was machen wir bei mehrfachen Nullstellen?

$$\frac{x-1}{(x+1)^2} = \dots \qquad \texttt{https://youtu.be/IlB1YqZO9B8}\ (5\,\mathrm{min}) \tag{12}$$

Was ist mit komplexen Nullstellen?

$$\int_1^\infty \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = \dots \qquad \texttt{https://youtu.be/AuevCYw0CFc}\ (12\,\mathrm{min}) \tag{13}$$

Damit sind wir für's Übungsblatt gerüstet!

Wenn Sie trotzdem zuerst noch ein weiteres Beispiel anschauen möchten (nicht notwendig, aber erlaubt): `https://youtu.be/GV0LBiY1vTQ` (10 min, optional)

Übrigens: In allen Beispielen war der Zählergrad (ZG) des Integranden kleiner als der Nennergrad (NG). Hilft die Partialbruchzerlegung auch, wenn ZG $\geq$ NG? Ja! Wir machen zuerst eine Polynomdisvion mit Rest und zerlegen dann nur den Rest, z.B.:

$$\begin{array}{l}
\big(x^5 - 8x^3 + 2x^2 + 4x - 3\big) : \big(x^3 - x\big) = x^2 - 7 + \dfrac{2x^2-3x-3}{x^3-x} \\
\underline{-x^5 + x^3} \\
\qquad -7x^3 + 2x^2 + 4x \\
\qquad \underline{7x^3 \qquad\quad - 7x} \\
\qquad\qquad\quad 2x^2 - 3x
\end{array} \tag{14}$$