Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2020

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 30.04.20

10.1 Eigenwerte & Eigenvektoren

Zum Einstieg multiplizieren wir ein paar Matrizen und Vektoren:

https://youtu.be/rCUqO_pAQ70 (5min) (1)

Definition: (Eigenwert, Eigenvektor)
Sei A eine quadratische Matrix, d.h. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.
Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert (EW) von A, wenn gilt:

$$\text{Es gibt ein } \vec{x} \neq \vec{0} \quad \text{mit} \quad A\vec{x} = \lambda\vec{x}\,. \tag{2}$$

Jedes solche $\vec{x} \in \mathbb{C}^n$ heißt zugehöriger Eigenvektor (EV).

Warum $\vec{x} \neq \vec{0}$? Und warum "Jedes"? https://youtu.be/4uOYcI4bS9I (2 min) (3)

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.
Lemma. *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$: λ ist Eigenwert von A $\Leftrightarrow$ $\chi_A(\lambda) = 0$*

Beispiel: https://youtu.be/IZaU2LgYsz0 (3 min) (4)

OK, aber wieso? https://youtu.be/2VkJdTrqaZA (3 min) (5)

Bestimmen Sie nun selbst alle EWe von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{6}$$

Zum EW λ gehörende EVen lösen das homogenen LGS $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.

Beispiel: https://youtu.be/g2-21KxyY4k (4 min) (7)

Bestimmen Sie nun auch alle EVen von

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\,. \tag{8}$$

Die EWe und EVen mancher Matrizen haben besonders hübsche Eigenschaften. Deshalb lohnen sich ein paar Definitionen. . .

10.2 Einige Begriffe

Definition: Sei A eine quadratische Matrix, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(i) A heißt hermitesch, falls $\overline{A}^T = A$.

(ii) A heißt symmetrisch, falls A reell, also $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und $A^T = A$.

(iii) A heißt unitär, falls $\overline{A}^T A = I$ (d.h. $A^{-1} = \overline{A}^T$).

(iv) A heißt orthogonal, falls A reell, also $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, und $A^T A = I$ (d.h. $A^{-1} = A^T$).

Beispiele und Erläuterungen: https://youtu.be/PERKs_a2db8 (9 min) (9)

Konsequenzen:

(U1) Die Spalten einer unitären $n\times n$-Matrix bilden eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$.
https://youtu.be/nfI_lIoV0tg (8 min)

(U2) A unitär $\Rightarrow |\det A| = 1$.

(U3) Produkte unitärer Matrizen sind unitär.
https://youtu.be/cUkfveBVwB0 (3 min)

(U4) Unitäre Transformationen erhalten Längen und Winkel.
https://youtu.be/TLuQe1UXFMo (4 min)

(H1) $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch $\quad\Leftrightarrow\quad \langle \vec{x}, A\vec{y}\rangle = \langle A\vec{x}, \vec{y}\rangle \ \ \forall x, y \in \mathbb{C}^n$.
https://youtu.be/egt63FyPfXA (6 min)

(H2) Ist $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch, so ist auch $\overline{A}^T BA$ hermitesch (für beliebiges $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$).

Überlegen Sie selbst, warum (U2) und (H2) richtig sind.