Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2020
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 11.05.20

Definitheit (Fortsetzung)

Satz. *Sei* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *symmetrisch und* U *orthogonal mit* $U^T A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.
Dann sind äquivalent:

(i) A *bzw.* q_A *ist positiv definit*

(ii) $\lambda_j > 0 \quad \forall\, j = 1, \dots, n$

(iii) $\det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\nu} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\nu 1} & \cdots & a_{\nu\nu} \end{pmatrix} > 0 \quad \forall\, \nu = 1, \dots, n$ *(Hauptunterdeterminanten* > 0*)*

Bemerkung: A ist negativ definit $\Leftrightarrow$ $(-A)$ ist positiv definit

Die Äquivalenz von (i) und (ii) haben wir bereits letztes Mal gesehen.
Aber wie funktioniert (iii)?

Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ https://youtu.be/9-yDlJONTuw (3 min) (1)

Und warum funktioniert (iii)? https://youtu.be/Bg8tLi4Gjpc (8 min) (2)

Untersuchen Sie jedes der drei Kriterien aus dem Satz für

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} . \tag{3}$$

Übrigens: Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen $\det A$ und $\det(-A)$. Überlegen Sie kurz selbst, bevor Sie das Video anschauen.

https://youtu.be/kDgKUOef2Ws (3 min) (4)

Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit, am besten mittels (iii):

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} , \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} , \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} . \tag{5}$$

---

11 Differentiation in mehreren Variablen

Worum soll es jetzt gehen? Zur Einstimmung werfen wir einen Blick in die Vorlesung aus dem Sommersemester 18 – dann sehen Sie mich auch mal wieder an der Tafel.

https://timms.uni-tuebingen.de:/tp/UT_20180528_002_mathnat2_0001?t=196.00 (11 min) (6)

Der Link springt direkt zu 3:16 – stoppen Sie bitte bei 14:25.

Zeichnen Sie die Graphen von

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = \mathrm{e}^{-(x-1)^2-4(y-1)^2}\,, \tag{7}$$

perspektivisch und/oder mit Höhenlinien.

11.1 Punktmengen und Folgen in $\mathbb{R}^n$

Hier geht es zunächst um Wiederholung, Notation und Begriffe. Wirklich Neues passiert erst in Abschnitt 11.2.

Unsere Funktionen hängen jetzt von einem $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ab, d.h.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_j \in \mathbb{R}\,, \quad j = 1, \ldots, n\,. \tag{8}$$

Wir schreiben austauschbar $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$.
Wir verwenden stets die Norm, die vom kanonischen Skalarprodukt kommt, und notieren sie als Betrag,

$$\|\vec{x}\| = |\vec{x}| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}\,. \tag{9}$$

Das kanonische Skalarprodukt notieren wir mit einem Punkt,

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{j=1}^{n} x_j\, y_j\,. \tag{10}$$

Vorsicht: Manchmal verwenden wir auch Matrixprodukte,

$$\text{(Skalarprodukt)} \qquad \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}^T \vec{y} \qquad \text{(Matrixprodukt)} \tag{11}$$

ε-Umgebungen sind Kreisscheiben bzw. Bälle:

$$\begin{aligned} U_\varepsilon(\vec{x}_0) &:= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \;:\; |\vec{x} - \vec{x}_0| < \varepsilon\} && \text{(offene } \varepsilon\text{-Umgebung von } \vec{x}_0\text{)}, \\ \overline{U_\varepsilon}(\vec{x}_0) &:= \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \;:\; |\vec{x} - \vec{x}_0| \le \varepsilon\} && \text{(abgeschlossene } \varepsilon\text{-Umgebung von } \vec{x}_0\text{)}. \end{aligned} \tag{12}$$

Definition: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt

- offen, falls zu jedem $\vec{x} \in M$ ein $\varepsilon(\vec{x}) > 0$ existiert mit $U_\varepsilon(\vec{x}) \subset M$.
- abgeschlossen, falls $M^C = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \;:\; \vec{x} \notin M\}$ offen ist.
- beschränkt, falls es ein $K > 0$ gibt, mit: $\vec{x} \in M \Rightarrow |\vec{x}| \le K$.
- kompakt, falls M sowohl abgeschlossen als auch beschränkt ist.

Anschaulich bedeutet das zunächst mal, dass offenen Mengen keine Randpunkte enthalten:

https://youtu.be/D0PY7kBkHkc (6 min) (13)

Überlegen Sie: Sind die folgenden Mengen offen, abgeschlossen, beschränkt und/oder kompakt?

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| < 1\,,\ |y| < 2\}\,, & B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| \le 1\,,\ |y| \le 2\}\,, \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| < 1\,,\ |y| \le 2\}\,, & D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| < 1\}\,. \end{aligned} \tag{14}$$