Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2020
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 9 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 14.05.20

11.1 Punktmengen und Folgen in $\mathbb{R}^n$ (Fortsetzung)

Konvergenz von Folgen in $\mathbb{R}^n$ definieren wir genau wie in $\mathbb{R}$.

Definition: Eine Folge $(\vec{x}_k)$, d.h.

$$\vec{x}_k = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}, \quad x_j^{(k)} \in \mathbb{R} \quad \text{und (z.B.) } k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

heißt konvergent gegen $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ falls gilt:

$$\text{Für jedes } \varepsilon > 0 \ \exists\, N(\varepsilon) \text{ mit } \quad |\vec{x}_k - \vec{a}| < \varepsilon \ \forall\, k \geq N(\varepsilon)\,. \tag{2}$$

Wir schreiben dann $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a}$.

Bemerkung: Damit gilt $\quad \lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{k\to\infty} x_j^{(k)} = a_j \quad \forall\, j = 1, \ldots, n.$

Warum? https://youtu.be/bv-AjNkT0Rc (4 min) (3)

11.2 Stetige Funktionen mehrerer Variabler

Auch Stetigkeit definieren wir genau wie im Eindimensionalen.

Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : M \to \mathbb{R}$. f heißt stetig in $\vec{x}_0 \in M$, falls gilt:
Zu jedem $\varepsilon > 0 \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$ mit $|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| < \varepsilon \ \forall\, \vec{x} \in M$ mit $|\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$.

Auch die Konsequenzen sind zunächst gleich wie im Eindimensionalen:

- Monome wie 1, x, x^2, xy, yz^3 etc. sind stetig.
- Summen, Produkte und Verkettungen stetiger Funktionen sind stetig.
- Damit sind Polynome überall stetig, z.B. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto x_1^2 - 2x_2 + 7x_3^3$; ebenso exp, sin, cos, $|\cdot|$; für positive Argumente auch log und $\sqrt{}$; und rationale Funktionen dort, wo der Nenner ungleich Null ist.

Alles wie gehabt. *Kann auch was Neues passieren?* Vielleicht das hier...
Wenn wir in

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} &, \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 &, \quad x = y = 0 \end{cases} \tag{4}$$

eine Variable festhalten und sie dann als Funktion der anderen Variablen betrachten, so ist sie immer stetig, egal wo wir das machen.

Machen Sie sich klar, dass z.B.

$$g_1(x) := f(x,1)\,, \quad g_0(x) := f(x,0)\,, \quad h_{-2}(y) := f(-2,y) \quad \text{und} \quad h_0(y) := f(0,y) \tag{5}$$

stetige Funktionen von x bzw. y sind. **Trotzdem** ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nicht überall stetig.

Echt? Wo nicht? https://youtu.be/_3bPTp8yH5E (4 min) (6)

Das Nächste ist dafür wieder wie im Eindimensionalen.

Satz. *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : M \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt: f nimmt auf M ein Mininum und ein Maximum an, d.h. $\exists\ \vec{a}, \vec{b} \in M$ mit $f(\vec{a}) \leq f(\vec{x}) \leq f(\vec{b})\ \forall\ \vec{x} \in M$.*

(ohne Beweis) ... aber wir machen's uns anschaulich klar:

https://timms.uni-tuebingen.de:/tp/UT_20180530_001_mathnat2_0001?t=2019.00 (8 min) (7)

11.3 Partielle, Richtungs- und totale Ableitung

Wir bilden die sogenannte partielle Ableitung einer Funktion f nach der Variablen x_j, indem wir alle anderen Variablen wie Konstanten behandeln und nach x_j ableiten.
Wir schreiben $\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{x})$ für die partielle Ableitung von f nach x_j an der Stelle $\vec{x}$.

Sei $f(\vec{x}) = x_1^2 x_3 - x_2 x_3 \cos(x_1)$. **Bestimmen Sie**

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}(\vec{x}) \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}(\pi, 1, 1)\,. \tag{8}$$

Wir können die Definition auch ein bisschen anders schreiben...

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{y}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{y} + h\vec{e}_j) - f(\vec{y})}{h} \qquad \text{https://youtu.be/3NUvc2MG-KQ (4 min)} \tag{9}$$

... und dann drängt sich sofort die Verallgemeinerung zur Richtungsableitung auf:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\vec{x}_0 + h\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{h} \qquad \text{https://youtu.be/sBxMdZqRno0 (4 min)} \tag{10}$$

Dabei muss $|\vec{v}| = 1$ sein.

Vorsicht: Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen im Punkt $\vec{x}_0$ folgt i.A. noch nicht die Stetigkeit!
Beispiel:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & , \quad x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 = y \end{cases} \qquad \text{https://youtu.be/xFYgCIgoHQQ (8 min)} \tag{11}$$

Wir müssen uns also nächstes Mal noch was Besseres überlegen!