Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 12 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 28.05.20

11.4 Höhere Ableitungen und Satz von Taylor (Forts.)

Mit der Vorarbeit vom letzten Mal können wir sofort erraten, wie der Satz von Taylor in mehreren Dimensionen aussehen sollte.

Satz. (Taylor)
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen,* $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$*,* $f \in C^{K+1}(M)$*,* $\vec{x}_0 + t\vec{h} \in M \ \forall \ t \in [0,1]$*, dann gilt*

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = \sum_{k=0}^{K} \frac{\left((\nabla \vec{h})^k f\right)(\vec{x}_0)}{k!} + R_K \tag{1}$$

wobei

$$R_K = \frac{\left((\nabla \vec{h})^{K+1} f\right)(\vec{x}_0 + \vartheta \vec{h})}{(K+1)!} \quad \textit{für ein } \vartheta \in (0,1)\,. \tag{2}$$

Bemerkungen https://youtu.be/cMpgJtH40VM (3 min) (3)

Beweisen können wir den Satz ebenfalls mit Rückgriff auf den eindimensionalen Fall:

https://youtu.be/bzQ2yoSvkIw (9 min) (4)

Die ersten Terme der Taylorreihe sehen so aus:

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) \;=\; f(\vec{x}_0) \;+\; \underbrace{\big(\nabla f\big)(\vec{x}_0)}_{\text{Vektor}} \cdot \vec{h} \;+\; \frac{1}{2}\,\vec{h}^T \underbrace{f''(\vec{x}_0)}_{\text{Matrix}}\,\vec{h} + \ldots \tag{5}$$

So können wir im Prinzip die Reihe bestimmen, indem wir ∇f, f'' etc. berechnen – besser geht's oft umgekehrt:

$$f(x,y) = \frac{\mathrm{e}^y}{1-x} \qquad \text{https://youtu.be/MjJjT6TT6HY (8 min)} \tag{6}$$

Sei $g(x,y) = \mathrm{e}^{xy} + \sin x$. **Bestimmen Sie**

$\big(\nabla g\big)(\vec{0})$ und $g''(\vec{0})$ mithilfe der Taylorreihe, d.h. *ohne* abzuleiten. (7)

11.5 Lokale Extrema

Definition: Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : M \to \mathbb{R}$.
$\vec{x}_0 \in M$ heißt lokale Maximalstelle von f, falls ein $\varepsilon > 0$ existiert, mit

$$f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0) \qquad \forall\, \vec{x} \neq \vec{x}_0 \quad \text{mit} \quad |\vec{x} - \vec{x}_0| < \varepsilon\,. \tag{8}$$

$f(x_0)$ heißt dann lokales Maximum.

(analog: "…Minimalstelle … $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$ …Minimum.")

Kriterien für lokale Extrema lesen wir direkt an der Taylorreihe ab:

Satz. (Lokale Extrema)
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(M)$.

(i) *Notwendige Bedingung:*
Ist $\vec{x}_0 \in M$ lokale Extremstelle von f $\quad \Rightarrow \quad \big(\nabla f\big)(\vec{x}_0) = \vec{0}$.

(ii) *Hinreichende Bedingung:*
Ist $f \in C^2(M)$, gilt $\big(\nabla f\big)(\vec{x}_0) = \vec{0}$ und ist $f''(\vec{x}_0)$ positiv definit (negativ definit)
$\Rightarrow \quad$ *$\vec{x}_0$ ist lokale Minimalstelle (Maximalstelle).*

Begründung https://youtu.be/VRCVwF1fyxc (3 min) (9)

Bemerkungen:
1. Ist $(\nabla f)(\vec{x}_0) = \vec{0}$ so heißt $\vec{x}_0$ *kritischer Punkt* von f.
2. Neben Minima und Maxima treten an kritischen Punkten z.B. auch Sattelpunkte auf.

Beispiele und Illustrationen in 2D

https://timms.uni-tuebingen.de:/tp/UT_20180614_002_mathnat2_0001?t=2108.00 (10)

(6 min – von 35:08 bis 41:31)

Und jetzt ein typisches Rechenbeispiel:

$$f(x,y) = x^4 - 2x^2 + y^2 + y \tag{11}$$

https://youtu.be/L1e4QrlewpY (6 min)

Untersuchen Sie analog

$$g(x,y) = xy \qquad \text{und} \qquad h(x,y) = 2x^2 + 4y^2 + 4xy - 4x + 4y + 7\,. \tag{12}$$
