

Mathematik II für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 13 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 08.06.20

11.6 Vektorwertige Funktionen

Hängt eine Funktion f nicht nur von n Variablen ab, sondern nimmt auch Werte in \mathbb{R}^m an, also $\vec{x} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$,

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

so können wir Begriffe wie Stetigkeit oder Diffbarkeit komponentenweise definieren, d.h. für die (skalaren) Funktionen f_1, \dots, f_m .

Notation: Vektorpfeile über den Funktionsnamen machen's jetzt auch nicht mehr übersichtlicher, also lassen wir sie lieber weg.

Die Idee *Diffbarkeit gleich lineare Approximierbarkeit* funktioniert weiterhin, d.h.

$$f \text{ diffbar in } \vec{x}_0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + f'(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} + o(|\vec{h}|), \quad |\vec{h}| \rightarrow 0. \quad (2)$$

Die Ableitung $f'(\vec{x}_0)$ ist konsequenterweise eine $m \times n$ -Matrix,

$$\underbrace{f'(\vec{x}_0)}_{\text{zwei Schreibweisen für die Ableitung}} = \frac{\partial f}{\partial \vec{x}}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Beispiele: Sei $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ und $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos x_1 \\ \sin x_1 \\ e^{x_2} \\ x_1 x_2 x_3 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{y}) = \begin{pmatrix} y_1^2 - y_4 \\ y_2 y_3 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

$$f'(\vec{y}) = \dots \quad \text{https://youtu.be/I0DudKuV7gE (1 min)} \quad (5)$$

Bestimmen Sie selbst $g'(\vec{x})$.

Auch die **Kettenregel** gilt weiterhin für $h = f \circ g$, wenn $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ diffbare Funktionen sind:

$$h'(\vec{x}) = f'(g(\vec{x})) \cdot g'(\vec{x}) \quad \text{https://youtu.be/1-0a2LFWSSo (3 min)} \quad (6)$$

Beispiel: Mit den Funktionen aus (4) gilt

$$h'(\vec{x}) = \dots \quad \text{https://youtu.be/TKvwhc0hZCg (2 min)} \quad (7)$$

Berechnen Sie nun zum Vergleich die rechte Seite von (6) mit den Funktionen aus (4).

11.7 Implizit definierte Funktionen

Fragestellung: Wir würden das Gleichungssystem $F(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$, mit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ und $F(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^m$, gerne nach \vec{y} auflösen. Ist das eindeutig möglich? Wenn ja, was können wir über $\vec{y} = f(\vec{x})$ lernen, ohne $f(\vec{x})$ explizit zu bestimmen?

$$\text{https://youtu.be/pY_PTCpaN2g (6 min)} \quad (8)$$

Beispiele:

(a) Löse die folgende Gleichung in einer Umgebung von $(x_0, y_0) = (0, -1)$ nach y auf:

$$\sin^2 x - y^2 + e^x = 0 \quad \text{https://youtu.be/7YNDcJwqQ6o (5 min)} \quad (9)$$

(b) Ist das folgende Gleichungssystem in einer Umgebung von $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, nach y und z auflösbar, definiert dort also Funktionen $y = f_1(x)$ und $z = f_2(x)$? Falls ja, was ist $f_1'(0)$ und $f_2'(0)$?

$$\begin{aligned} x^3 + xe^y + \sin z &= 0 \\ z^2 + y \cos x &= 0 \end{aligned} \quad \text{https://youtu.be/oQkYDRDgKw8 (6 min)} \quad (10)$$

Satz. (Implizite Funktionen)

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ offen, $F : M \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Sei weiter $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in M$ mit $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ und $\vec{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ gegeben, mit $F(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$.

Ferner sei $F \in C^1(M)$ und $\det \frac{\partial F}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \neq 0$.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass es genau eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \supset U_\varepsilon(\vec{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, mit $f(\vec{x}_0) = \vec{y}_0$ und

$$F(\vec{x}, f(\vec{x})) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in U_\varepsilon(\vec{x}_0). \quad (11)$$

Weiter gilt $f \in C^1(U_\varepsilon(\vec{x}_0))$ mit

$$f'(\vec{x}) = - \left[\frac{\partial F}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, f(\vec{x})) \right]^{-1} \frac{\partial F}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, f(\vec{x})). \quad (12)$$

Kurz: $F(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ ist (lokal) nach \vec{y} auflösbar bzw.

definiert (lokal) eine eindeutige Funktion $\vec{y} = f(\vec{x})$.

$$\text{Überlegen Sie: Welche Form haben die Matrizen } f', \frac{\partial F}{\partial \vec{x}} \text{ und } \frac{\partial F}{\partial \vec{y}}? \quad (13)$$

Wir schauen uns Beispiel (b) nochmal in der Sprache des Satzes an:

$$\text{https://youtu.be/G5yCbppQTQE (7 min)} \quad (14)$$

Warum gilt der Satz, und woher kommt diese Monsterformel für f' ?

$$\text{https://youtu.be/QLme6v20CLs (5 min)} \quad (15)$$
