

## Mathematik II für Naturwissenschaftler\*innen

Anleitung 16 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 22.06.20

---

### Integration in krummlinigen Koordinaten (Forts. von 12.1)

Bisher haben wir unsere Bereichsintegrale nur in kartesischen Koordinaten  $\vec{x}$  formuliert. Manche Bereiche lassen sich aber in anderen Koordinaten viel hübscher angeben:

<https://youtu.be/7yETFHIpyPM> (3 min) (1)

Es wäre also schön, wenn wir auch in anderen Koordinaten  $\vec{q}$  integrieren könnten. Das geht! Dabei müssen wir aber nicht nur den Integranden und die Integrationsgrenzen transformieren, sondern auch noch ein zusätzliches Gewicht einfügen:

$$\int \dots \int_K f(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n = \int \dots \int_{\tilde{K}} f(\vec{x}(\vec{q})) \left| \det \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}}(\vec{q}) \right| dq_1 \dots dq_n. \quad (2)$$

<https://youtu.be/XMceaPXyzfA> (3 min)

Wir nennen dabei  $dV = dx_1 \dots dx_n = \left| \det \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{q}}(\vec{q}) \right| dq_1 \dots dq_n$  das Volumenelement.

---

### Woher kommt diese Determinante im Volumenelement?

Wir erinnern uns, wie wir eindimensional zum Integral kamen:

[https://youtu.be/OSDAa5eh\\_kE](https://youtu.be/OSDAa5eh_kE) (2 min) (3)

Mehrdimensional, in kartesischen Koordinaten, geht es ganz ähnlich:

<https://youtu.be/dXZxVF9rx0> (4 min) (4)

Und jetzt verallgemeinern wir das auf den krummlinigen Fall:

<https://youtu.be/FMVwUsuEDD0> (7 min) (5)

---

**Beispiele...** auf der Rückseite.

### Beispiele (2D):

- Polarkoordinaten  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$

Volumenelement <https://youtu.be/soMnJgNzFvw> (3 min) (6)

Kreisfläche <https://youtu.be/vNDEo7zICRg> (2 min) (7)

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$  <https://youtu.be/Pk9NmKajR7E> (4 min) (8)

Ellipsenfläche <https://youtu.be/sKQSstoWmww> (3 min) (9)

**Berechnen Sie** die von der Kardioide

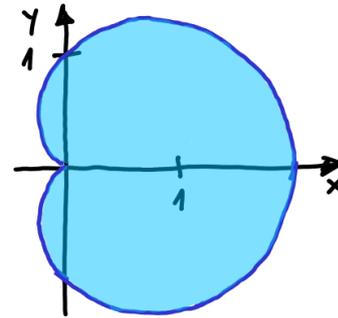
$$\begin{pmatrix} x(\phi) \\ y(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \cos \phi) \cos \phi \\ (1 + \cos \phi) \sin \phi \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad (10)$$

eingeschlossene Fläche.

HINWEISE: Verwenden Sie Polarkoordinaten.

Integrieren Sie  $r$  von Null bis  $1 + \cos \phi$ . (Warum?)

ERGEBNIS:  $\frac{3\pi}{2}$ .



---

### Beispiele (3D):

- Kugelkoordinaten  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$

**Bestimmen Sie** das Volumenelement in Kugelkoordinaten, d.h. berechnen Sie

$$\det \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)}. \quad (11)$$

Kugelvolumen <https://youtu.be/yoxbMFFNlyI> (4 min) (12)