

Mathematik II für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 17 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 25.06.20

12.2 Oberflächenintegrale

Wir möchten nun über zweidimensionale Flächen \mathcal{F} im dreidimensionalen Raum \mathbb{R}^3 integrieren. Solche Flächen können z.B. implizit, explizit oder parametrisiert gegeben sein:

$$\text{https://youtu.be/qFlbbwYLdC4 (4 min)} \quad (1)$$

Definition: Eine parametrisierte Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch eine Abbildung von $B \subseteq \mathbb{R}^2$ nach \mathbb{R}^3 ,

$$\vec{x}(u, v) = \begin{pmatrix} x_1(u, v) \\ x_2(u, v) \\ x_3(u, v) \end{pmatrix}, \quad (u, v) \in B. \quad (2)$$

- (i) $\vec{x}_u = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u}$ und $\vec{x}_v = \frac{\partial \vec{x}}{\partial v}$ heißen Tangentialvektoren.
 \mathcal{F} bzw. die Parametrisierung heißt regulär, falls \vec{x}_u, \vec{x}_v l.u., d.h. sie spannen eine Tangentialebene auf.
- (ii) Ist die Parametrisierung regulär, so heißt $\vec{n} = \frac{\vec{x}_u \times \vec{x}_v}{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|}$ Normale(-neinheitsvektor).
- (iii) Ist \mathcal{F} Oberfläche eines dreidimensionalen geometrischen Körpers K , so heißt ein Normaleneinheitsvektor innere Normale \vec{n}_i , falls er ins Innere von K zeigt.
Zeigt er dagegen nach außen, so heißt er äußere Normale \vec{n}_a , d.h. $\vec{n}_i = -\vec{n}_a$.

Beispiele für parametrisierte Flächen:

$$\mathcal{F} \text{ explizit gegeben} \quad \text{https://youtu.be/Z0-zMdhx0pU (3 min)} \quad (3)$$

$$\text{Kugeloberfläche} \quad \text{https://youtu.be/9V_Ae0-fp74 (6 min)} \quad (4)$$

$$\text{Kegelmantel} \quad \text{https://youtu.be/y4cXwRUV7BI (6 min)} \quad (5)$$

Parametrisieren Sie nun selbst den Mantel eines Kegelstumpfs mit Höhe h , Radius unten R , Radius oben $r < R$.

Die Integration über \mathcal{F} führen wir zurück auf ein Bereichsintegral über B .

Definition: (Oberfläche / Flächenintegral)

Sei $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche, regulär, d.h. $\vec{x} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei $B \subseteq \mathbb{R}^2$, und sei f stetig auf \mathcal{F} (d.h. $f \circ \vec{x}$ ist stetig auf B). Dann heißt

$$\int_{\mathcal{F}} f \, dO = \iint_B f(\vec{x}(u, v)) |\vec{x}_u \times \vec{x}_v| \, du \, dv \quad (6)$$

Flächenintegral von f über \mathcal{F} . Speziell heißt $O(\mathcal{F}) = \int_{\mathcal{F}} dO$ Oberfläche von \mathcal{F} .

$$\text{Woher kommt das } |\vec{x}_u \times \vec{x}_v|? \quad \text{https://youtu.be/uXTSB5JfIQ (4 min)} \quad (7)$$

Beispiele:

Kugeloberfläche <https://youtu.be/tBjP37Rvcjc> (2 min) (8)

$f(x, y) = \arctan(\frac{y}{x})$ über Kugeloberfläche im ersten Oktant
<https://youtu.be/qL07Az1AvdM> (5 min) (9)

Bestimmen Sie selbst die Oberfläche des oben parametrisierten Kegelmantels.

Interessiert uns der Fluss eines Vektorfelds \vec{f} durch \mathcal{F} so rechnen wir wie folgt.

Definition: (Oberflächenintegral 2. Art / Fluss)

Sei $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ eine parametrisierte Fläche, regulär, d.h. $\vec{x} : B \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei $B \subseteq \mathbb{R}^2$, und sei $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld auf \mathcal{F} (d.h. $\vec{f} \circ \vec{x}$ ist stetig auf B). Dann heißt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}} \vec{f} d\vec{O} &= \iint_B \left(\vec{f}(\vec{x}(u, v)) \cdot \vec{n}(u, v) \right) \underbrace{|\vec{x}_u \times \vec{x}_v|}_{=dO} du dv \\ &= \iint_B \vec{f}(\vec{x}(u, v)) \cdot \underbrace{(\vec{x}_u \times \vec{x}_v)}_{=d\vec{O}} du dv \quad \text{Fluss von } \vec{f} \text{ durch } \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (10)$$

Wieso? <https://youtu.be/FFR08VLQAuI> (4 min)

Überlegen Sie: Welchen Einfluss hat die Wahl der Normale \vec{n} auf das Ergebnis?

Beispiele:

Fluss von $\frac{a\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$ durch Kugeloberfläche von innen nach außen
<https://youtu.be/Qss0WMsj1ek> (3 min) (11)

Bestimmen Sie den Fluss von $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch den oben parametrisierten Kegelmantel.