

## Mathematik II für Naturwissenschaftler\*innen

Anleitung 19 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 02.07.20

---

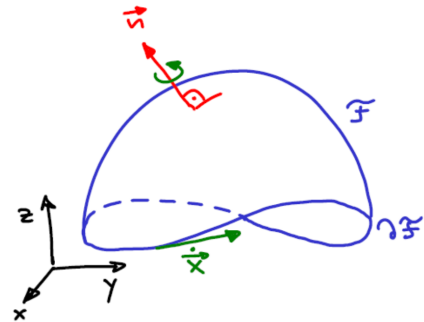
### 12.3 Integralsätze (Forts.)

Der Satz von Stokes gilt nicht nur in der Ebene sondern auch im  $\mathbb{R}^3$ , wie wir heute (29.6.) im Livestream gesehen haben.

#### Satz. (Stokes'scher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ )

Sei  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$  eine zweiseitige Fläche, regulär, mit stückweise glatter, geschlossener Randkurve  $\partial\mathcal{F}$ , die eine Rechtsschraube um die Flächennormale  $\vec{n}$  beschreibt, und sei  $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig diffbares Vektorfeld, dann gilt

$$\iint_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{n} \, dO = \oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \, d\vec{x}. \quad (1)$$



#### Bekannte Spezialfälle:

ebener Stokes <https://youtu.be/Fv3GDwN1RqE> (2 min) (2)

Kurvenintegrale mit Stammfunktion  
(konservative Vektorfelder) <https://youtu.be/eo0gCixy0Tg> (2 min) (3)

---

**Beispiel:** Sei  $B = [0, 1]^2$  das Einheitsquadrat mit (stückweise) parametrisiertem Rand  $\partial B$  so, dass  $B$  im Gegenuhrzeigersinn umlaufen wird. Weiter sei  $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} y^3 \\ 3x \end{pmatrix}$ .

$$\text{Bestimmen Sie } \oint_{\partial B} \vec{v} \, d\vec{x}. \quad (4)$$

---

Mithilfe des Stokes'schen Satzes können wir die anschauliche Bedeutung der Rotation als Wirbeldichte erkennen:

[https://youtu.be/Ge1oU3m\\_chI](https://youtu.be/Ge1oU3m_chI) (4 min) (5)

---

### 13 Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik

Zum Aufwärmen schauen wir uns ein bisschen auf [www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org) um. Einen guten Einstieg bieten z.B. die folgenden *Skills*:

*Basic set notation / Subsets of sample spaces / Simple probability / Probabilities of compound events / Independent probability / Dependent probability / Simple hypothesis testing*

... oder Sie fangen mit dem **Einstufungstest** an.

Hier können Sie übrigens auch noch Zusatzpunkte holen (vgl. Übungsblatt 1, Aufgabe 5).

---

## 13.1 Grundbegriffe<sup>1</sup>

Wir bedienen uns der Mengenschreibweise:

$$\text{Ereignisse und (Teil-)Mengen} \quad \text{https://youtu.be/fHK2aVwP4ko} \quad (2 \text{ min}) \quad (6)$$

$$\text{Potenzmenge und } \sigma\text{-Algebren} \quad \text{https://youtu.be/v-HCBZK8\_Q} \quad (3 \text{ min}) \quad (7)$$

$$\text{Mengenoperationen} \quad \text{https://youtu.be/PMwkaZoedsQ} \quad (3 \text{ min}) \quad (8)$$

Nun wollen wir Ereignissen Wahrscheinlichkeiten zuordnen:

$$\begin{aligned} \text{Wahrscheinlichkeitsma\ss e und -r\aaume} \\ \dots \text{ mit Beispielen} \end{aligned} \quad \text{https://youtu.be/VKRNu2b0Zgo} \quad (8 \text{ min}) \quad (9)$$

---

*Jetzt m\u00fcssen wir oft Dinge abz\u00e4hlen, daher...*

## 13.2 Kombinatorik

Anzahl m\u00f6glicher Anordnungen von  $n$  (unterschiedlichen) Objekten:

$$n(n-1)\cdots 1 = n! \quad \text{https://youtu.be/l1\_dbrCbv\_4} \quad (1 \text{ min}) \quad (10)$$

Anzahl m\u00f6glicher Anordnungen von  $n$  Objekten, die in  $j$  Gruppen mit jeweils  $k_1, k_2, \dots, k_j$  gleichen Objekten vorkommen ( $k_1 + k_2 + \dots + k_j = n$ ):

$$\frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_j!} \quad \text{https://youtu.be/-ySdGGjHCm8} \quad (3 \text{ min}) \quad (11)$$

### Urnenmodelle

- Urne mit  $n$  unterschiedlichen Kugeln
- Ziehe  $k$  Kugeln

Anzahl der m\u00f6glichen Ergebnisse:

	mit Zur\u00fccklegen	ohne Zur\u00fccklegen
mit Beachtung der Reihenfolge	$n^k$	$\frac{n!}{(n-k)!}$
ohne Beachtung der Reihenfolge	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

$$\text{Drei F\u00e4lle...} \quad \text{https://youtu.be/q5k0irz1USg} \quad (4 \text{ min}) \quad (12)$$

$$\dots \text{ und der Vierte.} \quad \text{https://youtu.be/pRA3\_rVkwg} \quad (4 \text{ min}) \quad (13)$$

**Beispiel:** W\u00fcfelzwerge!

$$\text{https://youtu.be/tXH1FDI8yhM} \quad (2 \text{ min}) \quad (14)$$

### Überlegen Sie:

- Wie gro\u00df ist jeweils die Wahrscheinlichkeit daf\u00fcr, mit fairen Farbw\u00fcfeln die Kombination f\u00fcr einen ein-, zwei- oder dreifarbigem Zwerg zu w\u00fcfeln?
- Wieviele ein-, zwei- und dreifarbigem Zwerg gibt es jeweils?
- Wieviele K\u00e4rtchen hat das Spiel?

---

<sup>1</sup>Wenn Sie Theorie nicht so prickelnd finden, k\u00f6nnen Sie auch erst mal zur Kombinatorik vorspringen, und nur bei Bedarf hier nachschauen – oder Sie gucken sich sogar als erstes die W\u00fcfelzwerge an.