

Mathematik II für Naturwissenschaftler*innen

Anleitung 20 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 06.07.20

Im Folgenden ist (Ω, \mathcal{A}, P) stets ein Wahrscheinlichkeitsraum.

13.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition: (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Seien $A, B \subseteq \Omega$ mit $P(B) \neq 0$. Wir nennen

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1)$$

bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B .

Warum definieren wir das so? <https://youtu.be/n41jtHkpB6k> (2 min) (2)

Beispiel:

Nochmal Würfeln https://youtu.be/0_lbhfERD90 (3 min) (3)

Definition: (Stochastische Unabhängigkeit)

Zwei Ereignisse A und B heißen (stochastisch) unabhängig, falls gilt

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Diese Definition ist gut, weil... <https://youtu.be/jyXlkjA87x8> (1 min) (4)

Wir haben bereits gesehen, dass i.A. $P(A|B) \neq P(B|A)$. Mit genügend zusätzlicher Information können wir die beiden aber ineinander umrechnen.

Satz. (Bayes)

Seien A_1, A_2, \dots, A_n disjunkt mit $\Omega = \bigcup_{j=1}^n A_j$, und sei $B \subseteq \Omega$ mit $P(B) \neq 0$.
Dann gilt für jedes $j = 1, \dots, n$

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)P(A_j)}{\sum_{k=1}^n P(B|A_k)P(A_k)}. \quad (5)$$

Beweis: <https://youtu.be/XCtan0l6leY> (8 min) (6)

Beispiel: PCR-Test auf SARS-CoV-2

Bei einem klinischen Test bezeichnet die *Sensitivität* die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Test Infizierte als infiziert erkennt; die *Spezifität* bezeichnet die Wahrscheinlichkeit

dafür, dass er Gesunde als gesund erkennt. Als *Prävalenz* wird der Anteil der Infizierten an der Gesamtbevölkerung oder einer anderen untersuchten Gruppe bezeichnet.

Ein PCR-Test wird eingesetzt um eine akute Infektion mit SARS-CoV-2 nachzuweisen. Sensitivität und Spezifität der momentan verfügbaren PCR-Tests sind nicht abschließend geklärt. Wir rechnen¹ im Folgenden mit einer Spezifität von 99,5 % und einer Sensitivität von 98,8 %. Wir nehmen an, dass Menschen nach einer Infektion mit dem Virus zwei Wochen lang ansteckend sind. Demnach ist in Deutschland momentan ca. 0,01 % der Bevölkerung akut infektiös.²

Eine zufällig ausgewählte Person wird getestet. Der Test fällt positiv aus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Person tatsächlich infiziert ist?

https://youtu.be/BXwVyPN_t-Q (8 min) (7)

Ihre Corona-Warn-App schlägt Alarm. Sie hatten Kontakt mit einer akut infizierten Person. Wir nehmen an, Ihr Risiko sich angesteckt zu haben beträgt 10 %. Sie werden getestet, der PCR-Test fällt positiv aus. **Überlegen Sie**, wie groß nun die Wahrscheinlichkeit ist, dass Sie infiziert sind.

13.4 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen

Definition: Eine Funktion $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ heißt (reelle) Zufallsvariable (ZV), wenn gilt

$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Was jetzt, Funktion oder Variable? <https://youtu.be/bSoAfAGotz8> (3 min) (9)

Definition: Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ eine ZV. Wir nennen $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ mit $F_X(x) = P(X \leq x)$ Verteilungsfunktion von X .

Beispiel: Zweifaches Würfeln
inkl. Plot als Stufenfunktion <https://youtu.be/TgFQmYjPy2Y> (4 min) (10)

Eigenschaften
von Verteilungsfunktionen <https://youtu.be/qOGm0Nu1Ft4> (2 min) (11)

Beispiel: Binomialverteilung

Wir sagen X ist binomialverteilt mit Parametern n und p ,
und schreiben dafür $X \sim \text{Bin}(n, p)$, wenn gilt

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}. \quad \text{https://youtu.be/lJRbFdTBnw4} \quad (5 \text{ min}) \quad (12)$$

¹ausgehend von *SARS-CoV-2*, Wikipedia, Die freie Enzyklopädie, <https://de.wikipedia.org/wiki/SARS-CoV-2%23RT-PCR-Test>, Stand 28.06.2020, abgerufen am 30.06.2020, und Foundation for Innovative New Diagnostics, *SARS-CoV-2 molecular assay evaluation: results*, <https://www.finddx.org/covid-19/sarscov2-eval-molecular/molecular-eval-results/>, 09.06.2020, abgerufen am 30.06.2020.

²M. Roser et al., *Coronavirus Pandemic (COVID-19)*, <https://ourworldindata.org/coronavirus/country/germany?country=%7EEDEU%23weekly-and-biweekly-cases-where-are-confirmed-cases-increasing-or-falling>, abgerufen am 30.06.2020.