Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2020

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Anleitung 21 zur Vorbereitung auf die Vorlesung am 09.07.20

13.7 Hypothesentests[1]

Beispiel: Um Ostern 2020 wurden an der Königlich Technischen Hochschule (KTH) in Stockholm Blutproben von 446 zufällig ausgewählten Stockholmer∗innen auf Antikörper gegen SARS-CoV-2 untersucht. In 45 Proben wurden Antikörper gefunden.[2]

- Dr. T glaubte damals, dass bereits 15% der Bevölkerung Stockholms Antikörper gegen SARS-CoV-2 gebildet habe,
- Dr. B glaubte, dass es nur 8% seien.

Wir untersuchen die Plausibilität von Dr. Ts Annahme mit einem Hypothesentest:

`https://youtu.be/jOPkwK5Xw8A` (8 min) (1)

Zur Bestimmung des **p-Werts**

- nehmen wir für einen Augenblick an, dass die Nullhypothese wahr ist, und
- berechnen dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Teststatistik den tatsächlich beobachteten Wert annimmt oder einen Wert, der noch stärker *gegen* die Nullhypothese spricht.

Technische Anmerkung: In `GNU Octave` oder MATLAB berechnen wir $P(X \leq 45)$ mit dem Befehl `binocdf(45,446,0.15)`.

Führen Sie analog einen Hypothesentest für Dr. Bs Annahme durch – bis zu der Stelle, an der Sie den p-Wert als Wahrscheinlichkeit $P(X \ldots)$ angeben.

Vertrauensintervalle

Welche Annahmen über den Anteil der Stockholmer∗innen mit Antikörpern sind denn nun mit dem Ergebnis der KTH-Studie vereinbar?

einseitiges 95%-Vertrauensintervall (VI) für w
`https://youtu.be/0C-zdlipSzc` (5 min) (2)

beidseitiges 95%-VI für w `https://youtu.be/Ek0ttsiimsE` (8 min) (3)

Überlegen Sie: Wie verändern sich die Vertrauensintervalle (qualitativ) wenn wir statt eines 95%-VIs ein 99%-VI bestimmen, d.h. wenn wir statt auf Signfikanzniveau $\alpha = 5\%$ auf Signifkanzniveau $\alpha = 1\%$ testen?

---

[1] Ich behalte die Nummerierung aus dem Skript bei.

[2] `https://www.kth.se/en/aktuellt/nyheter/10-procent-av-stockholmarna-smittade-1.980727`

13.4 Zufallsvariablen und Verteilungsfunktionen (Forts.)

Stetige Verteilungen

Bisher haben wir nur diskrete Zufallsvariablen betrachtet. Jetzt wollen wir uns auch kontinuierliche Zufallsvariablen anschauen.

Definition: Eine ZV X mit Verteilungsfunktion F_X hat die (Verteilungs-)Dichte f_X, wenn eine nichtnegative, integrierbare Funktion f_X existiert mit

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{4}$$

Folgerungen https://youtu.be/qL0T8pSqW9g (3 min) (5)

Beispiele:

Gleichverteilung https://youtu.be/HU0f1pqD9sk (3 min) (6)

Normalverteilung. Wir schreiben $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ und sagen X ist normalverteilt mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$, wenn X die Dichte

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{hat.} \tag{7}$$

https://youtu.be/9R1rRi8seY8 (1 min)

Spezialfall: $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ – Standardnormalverteilung. Die Verteilungsfunktion bekommt einen eigenen Namen,

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,, \tag{8}$$

und ist tabelliert. Einige wichtige Werte:

$$\Phi(0) = \tfrac{1}{2} \qquad \Phi(1) \approx 0{,}84$$
$$\Phi(1{,}64) \approx 0{,}95 \qquad \Phi(1{,}96) \approx 0{,}975 \tag{9}$$

https://youtu.be/d24CUMi5iSs (3 min)

Bemerkung: Kennen wir die Standardnormalverteilung, so kennen wir jede Normalverteilung, denn wenn $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, so ist $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ standardnormalverteilt, d.h.

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1)\,. \tag{10}$$

https://youtu.be/5sBAkccKaYA (5 min)

Exponentialverteilung. Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & ,\quad x < 0 \\ c\,\mathrm{e}^{-ax} & ,\quad x \geq 0 \end{cases} \tag{11}$$

mit einem positiven Parameter a. **Überlegen Sie:** Wie muss c gewählt werden, damit f_X wirklich eine Dichte ist? Bestimmen Sie auch F_X sowie $P(1 \leq X \leq 2)$.
