

Mathematik II für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 1 (Abgabe am 23.04.2020)

Aufgabe 1

(9 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a) $\int \cos^3 x \, dx$ b) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$ c) $\int \cos^5 x \, dx$

Aufgabe 2

(1+6+2 = 9 Punkte)

a) Zeichnen Sie den Graph von $f : x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

b) Berechnen Sie

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{2\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon^2}^1 \frac{dx}{x} \right).$$

c) Begründen Sie, warum $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ nicht existiert. Nehmen Sie dabei Bezug auf die Aufgabenteile (a) und/oder (b).

ERINNERUNG: Für $F(x) = \log|x|$ gilt $F'(x) = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$, denn (Kettenregel)

$$F(x) = \log|x| = \begin{cases} \log x, & x > 0 \\ \log(-x), & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad F'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \frac{1}{(-x)}(-1), & x < 0 \end{cases}.$$

Aufgabe 3

(15 Punkte)

Berechnen Sie:

a) $\int_1^{\infty} \frac{7x+9}{x^3+4x^2+3x} \, dx$ b) $\int_1^{\infty} \frac{9x+18}{x^3+6x^2+9x} \, dx$ c) $\int_1^{\infty} \frac{2x^2-8x-8}{(x^2+4)^2} \, dx$

Aufgabe 4

(10 Zusatzpunkte)

Die Funktion

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} \, dt$$

ist für alle $s \in \mathbb{R}^+$ wohldefiniert. (Warum?)

a) Berechnen Sie $\Gamma(1)$.

b) Zeigen Sie: $\Gamma(s+1) = s \Gamma(s) \forall s > 0$. HINWEIS: Partielle Integration.

c) Bestimmen Sie $\Gamma(20)$.

d) Zeigen Sie:

$$\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-xt} \, dt \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad \text{HINWEIS: Substitution.}$$

Aufgabe 5

(100 Zusatzpunkte)

Auf www.khanacademy.org können Sie selbständig Mathematik üben und dabei vor allem auch Schulstoff wiederholen. Auf den Übungsblättern und in den Übungen werden wir regelmäßig darauf hinweisen, welche *Skills*, *Missions etc.* gerade sinnvoll sind.

Für Ihre Aktivitäten auf KHANACADEMY können Sie Zusatzpunkte erhalten. Wir vergeben die Zusatzpunkte für die Anzahl *Skills*, für die Sie im Zeitraum vom 01.04.2020 bis zum 12.07.2020 den Status *Mastered* erreicht haben, und zwar:

| | | | | | | | |
|------------------------|-----|-------|--------|---------|---------|---------|------|
| <i>Skills Mastered</i> | <40 | 40–79 | 80–119 | 120–159 | 160–199 | 200–249 | ≥250 |
| Zusatzpunkte | – | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

HINWEIS: Um für Aktivitäten auf KHANACADEMY Zusatzpunkte zu erhalten, gehen Sie wie folgt vor.

- Benutzen Sie die *englische* Version der Seite.
- Machen Sie sich auf www.khanacademy.org einen Account. Geben Sie dabei als *Real Name* Ihren wahren Namen an.
- Um eine bestimmte *Skill* zu üben, geben Sie z.B. in das Suchfeld den Namen der *Skill* ein (z.B. *Powers of the imaginary unit*). Schränken Sie ggf. das Suchergebnis auf *Exercises* ein. Wenn Sie genügend Aufgaben in Folge richtig beantwortet haben, erreichen Sie den Status *Practiced*.
- Die Status *Level One*, *Level Two* und *Mastered* können Sie nur durch *Mastery Challenges* erreichen, die Ihnen angeboten werden, wenn Sie den nächst niedrigeren Status bereits vor einer Weile erreicht haben. Wenn Ihnen keine *Mastery Challenges* angeboten werden, wählen Sie eine *Mission* aus, am besten eine, der die aktuellen *Skills* entstammen oder *The World of Math* (enthält alles).
- Damit Ihr*e Übungsgruppenleiter*in Ihren Fortschritt sehen (und dafür Zusatzpunkte gutschreiben) kann, müssen Sie sie/ihn zu Ihrem *Coach* machen. Dazu benötigen Sie ihren/seinen *Class code*, welchen Sie in der Übungsgruppe erhalten.

Sinnvolle *Skills* diese Woche sind z.B.

- *Integration by parts*,
- *Integration by parts: definite integrals*,
- *Reverse chain rule*,
- *Partial fraction expansion* und
- *Integration with partial fractions*.