Universität Tübingen, Mathematisches Institut — Sommersemester 2020
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 2 (Abgabe am 30.04.2020)

Aufgabe 6 (15 Punkte)
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'\,y - \sin x = 1\,, \quad y(\frac{\pi}{2}) = -\sqrt{\pi}$

b) $y' = (\cos y - \mathrm{e}^y)\log x\,, \quad y(2) = 0$

c) $(x^2 + 3x + 2)y' = (x^2 + x + 2)y\,, \quad y(0) = \frac{1}{16}$

Aufgabe 7 (10 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen. Berechnen Sie dazu zunächst die Lösungen der jeweiligen homogenen Gleichung. Eine partikuläre Lösung finden Sie dann entweder durch Raten oder durch Variation der Konstanten.

a) $y' + 9y = 19$ b) $y' + 9y = \mathrm{e}^x$ c) $y' + 9y = \mathrm{e}^{-9x}$ d) $y' + 9y = x(x-1)$

Aufgabe 8 (9 Punkte)
Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen. Geben Sie in Teil c auch die Menge aller reellen Lösungen an.

a) $y'' + 8y' + 15y = 0$ b) $y'' + 6y' + 9y = 0$ c) $y'' + 4y' + 13y = 0$

Aufgabe 9 (12 Punkte)
Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'' + 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

b) $y'' + 4y' + 13y = 0, \quad y(0) = \pi,\ y'(0) = 0$

c) $y'' + 8y' + 15y = 0, \quad y(0) = 1 = y'(0)$

d) $y'' + 8y' + 15y = 1, \quad y(0) = 1 = y'(0)$

Aufgabe 10 (100 Zusatzpunkte)
Sinnvolle *Skills* auf `www.khanacademy.org` sin momentan z.B.

- *Verify solutions to differential equations*,
- *Write differential equations*,
- *Separable differential equations*,
- *Features of a circle from its standard equation* and
- *Graph a circle from its standard equation.*

Hinweise: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).

Aufgabe 11 [1] (vgl. `http://spikedmath.com/517.html`) (10 Zusatzpunkte)
Wir definieren eine Ellipse als die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die die Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten, genannt Brennpunkte, gleich ist. Als Brennpunkte wählen wir $(\pm f, 0)$ und als Summe der Abstände $d > 2f$.

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte $(\pm a, 0)$ der Ellipse mit der x-Achse, sowie die Schnittpunkte $(0, \pm b)$ mit der y-Achse. Die Größen a und b heißen Halbachsen der Ellipse.
b) Drücken Sie die in der Definition genannte Bedingung, die die Punkte (x, y) erfüllen müssen, als eine Gleichung aus (die dann die Parameter f und d enthält).
c) Bringen Sie die Gleichung aus (b) auf die Form

$$\frac{x^2}{\dots} + \frac{y^2}{\dots} = 1\,.$$

d) Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse aus (a) und (c), und drücken Sie die Bedingung für die Punkte (x, y) nun durch eine Gleichung aus, die statt f und d nur die Parameter a und b enthält.

[1] Diese Aufgabe bezieht sich nicht auf den aktuellen Vorlesungsstoff, sondern kann mit elementaren Methoden vollkommen unabhängig von der Vorlesung bearbeitet werden. Wir werden aber im Laufe des Semesters auf diese Aufgabe zurückkommen.
Um die Aufgabe nicht zu entwerten wird zu ihr keine Lösung publiziert.