Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2020

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 3 (Abgabe am 07.05.2020)

Aufgabe 12 (20 Punkte)
Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der folgenden DGLn.

a) $y'' + 8y' + 15y = \mathrm{e}^{-2x}$
b) $y'' + 8y' + 15y = \mathrm{e}^{-5x}$
c) $y'' + 4y' + 13y = \sin x$
d) $y'' + 6y' + 9y = \mathrm{e}^{-3x}$

Aufgabe 13 [1] (6 Punkte)
Die Abbildung $\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} \mapsto \vec{x}' = D_\phi\,\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ mit

$$D_\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

bewirkt eine Drehung des Vektors $\vec{x}$ um den Winkel ϕ.

a) Illustrieren Sie dies für $\phi = \frac{\pi}{4}$ und die Vektoren $(2,0)^T$ und $(-1,1)^T$ mit einer Zeichnung.
b) Zeigen Sie: $D_\phi^{-1} = D_\phi^T = D_{-\phi}$ (d.h. $\vec{x} = D_{-\phi}\,\vec{x}'$).

Aufgabe 14 (20 Punkte)

a) Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen alle Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix D_ϕ aus Aufgabe 13 sowie alle zugehörigen Eigenvektoren.

---

[1] Diese Aufgabe wiederholt die Matrix-Vektor-Multiplikation aus dem Wintersemester.

Aufgabe 15 (10 Zusatzpunkte)
Wir möchten alle Lösungen $y(x)$ der DGL[2]

$$y^{(4)} + 4y^{(3)} + 5y'' + 4y' + 4y = 2x + 20$$

finden. Dazu betrachten wir zunächst die zugehörige homogene Gleichung und machen den Ansatz

$$y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} .$$

a) Welche Gleichung muss λ erfüllen?
b) Welche λ lösen diese Gleichung? HINWEIS: $\lambda = \mathrm{i}$ ist darunter.
c) Geben Sie dementsprechend 4 linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung an.
HINWEIS: Eine doppelte Lösung der Bestimmungsgleichung für λ behandeln Sie wie bei DGLn zweiter Ordnung.
d) Raten Sie eine Lösung der inhomogenen Gleichung.
e) Geben Sie alle Lösungen der inhomogenen Gleichung an.

Aufgabe 16 [3] (vgl. `http://spikedmath.com/517.html`) (10 Zusatzpunkte)
Wir definieren eine Hyperbel als die Menge aller Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, für die der Betrag der Differenz der Abstände zu zwei gegebenen Punkten, genannt Brennpunkte, gleich ist. Als Brennpunkte wählen wir $(\pm f, 0)$ und als Betrag der Differenzen der Abstände $2a$ mit $0 < a < f$.

a) Drücken Sie die in der Definition genannte Bedingung, die die Punkte (x, y) erfüllen müssen, als eine Gleichung aus (die dann die Parameter f und a enthält).
b) Bringen Sie die Gleichung aus (a) auf die Form

$$\frac{x^2}{\dots} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Drücken Sie $b > 0$ als Funktion von f und a aus.
c) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Hyperbel mit der x-Achse.
d) Bestimmen Sie $m := \lim\limits_{|x|\to\infty} \frac{|y|}{|x|}$ für Punkte (x, y) auf der Hyperbel.
Welche Rolle spielen die Geraden $y = \pm mx$ beim Zeichnen der Hyperbel?
e) Zeichnen Sie die Hyperbel für $f = 5$ und $a = 4$.

Aufgabe 17 (100 Zusatzpunkte)
Sinnvolle *Skills* auf `www.khanacademy.org` sind momentan z.B.

- *Center & radii of ellipses from equation* und
- *Ellipse standard equation & graph*

HINWEISE: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).

[2]Zur Erinnerung: $y^{(2)} = y''$
[3]Diese Aufgabe bezieht sich nicht auf den aktuellen Vorlesungsstoff, sondern kann mit elementaren Methoden vollkommen unabhängig von der Vorlesung bearbeitet werden. Wir werden aber im Laufe des Semesters auf diese Aufgabe zurückkommen.
Um die Aufgabe nicht zu entwerten, wird zu ihr keine Lösung publiziert.