

Mathematik II für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 4 (Abgabe 14.05.2020)

Aufgabe 18 (5 Punkte)
Geben Sie für jede der Matrizen aus Aufgabe 14 an, ob sie diagonalisierbar ist – mit minimaler(!) Begründung.

Aufgabe 19 (10 Punkte)
a) Führen Sie die HAT für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T A U$ an.

b) Berechnen Sie e^{-Cx} für $x \in \mathbb{R}$ und C aus Aufgabe 14.
HINWEIS: Diagonalisieren Sie dazu die Matrix C .

Aufgabe 20 (20 Punkte)
Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

a) $9x^2 + 4xy + 6y^2 = 1$

b) $2x^2 + 12xy - 7y^2 = 5$

c) $9x^2 + 24xy + 16y^2 = 25$

d) $5x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 = 8$

Aufgabe 21 (3+3+4 = 10 Zusatzpunkte)
Wir nennen

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von \vec{y} Funktionen von x , und \vec{y}' ist die komponentenweise Ableitung nach x , d.h.

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

a) Rechnen Sie nach: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor \vec{u} , so ist

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

b) Zeigen Sie: Jedes \vec{y} der Form

$$\vec{y}(x) = e^{Ax} \vec{b}, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$, mit A aus Aufgabe 19.

Aufgabe 22

(100 Zusatzpunkte)

Sinnvolle *Skills* auf www.khanacademy.org sind momentan z.B.

- *Vertices & direction of a hyperbola* und
- alle, die es sonst noch in *Precalculus – Conic sections* gibt.

HINWEISE: Siehe Aufgabe 5 (Blatt 1).