Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2020
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 5 (Abgabe spätestens am 21.05.2020 – Vorsicht Feiertag!)

Aufgabe 23 (3+7 = 10 Punkte)

a) Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Zeigen Sie: $\det A = \prod_{j=1}^{n} \lambda_j$.

b) Gegeben sei die quadratische Form

$$q_A(x, y, z) = x^2 + 10y^2 + z^2 - 4y(x + z) + 2axz\,, \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Für welche Werte von a ist q_A positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat q_A für andere Werte von a?

Aufgabe 24 (10 Punkte)
Sei $\vec{x} = (x\ y\ z)^T$ und $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Seien weiter $f, q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = \mathrm{e}^{xz} + (y - z)\sin(xy)$ und $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$.

a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen f_x, f_y und f_z.
b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen q_x, q_y und q_z.

Aufgabe 25 (4+4+4 = 12 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad x^2 + y^2 > 0 \\ 0 & , \quad x = y = 0 \end{cases}\,.$$

a) Zeigen Sie: Die Funktion f ist stetig. Hinweis: $|xy| \le x^2 + y^2$ (warum?)
b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f (für $\vec{x} \neq \vec{0}$).
c) Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f in $\vec{0}$.

Aufgabe 26 (10 Zusatzpunkte)
Wir schreiben die DGL 2. Ordnung

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

als ein DGL-System 1. Ordnung (vgl. Anleitung 4). Definieren Sie dazu

$$\vec{u}(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}\,,$$

und suchen Sie eine Matrix A, so dass $\vec{u}\,' = A\vec{u}$ äquivalent zu $(*)$ wird. Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und vergleichen Sie mit dem charakteristischen Polynom der DGL $(*)$.

Das Umschreiben auf ein System funktioniert analog für DGLn beliebiger Ordnung (auch nichtlineare). Schreiben Sie nun die DGL aus Aufgabe 15 als DGL-System 1. Ordnung. Vergleichen Sie auch hier das charakteristischen Polynom der DGL mit dem charakteristischen Polynom der im DGL-System auftretenden Matrix.