Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2020
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 6 (Abgabe 28.05.2020)

Aufgabe 27 (4+4 = 8 Punkte)
Wir betrachten nochmal die Funktion f aus Aufgabe 25.

a) Wo ist $\frac{\partial f}{\partial x}$ stetig, wo nicht?
b) Ist f im Ursprung total differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 28 (3+3+3 = 9 Punkte)
Wir betrachten nochmal die Funktionen f und q aus Aufgabe 24.

a) Für welche $\vec{x}$ sind f und q total differenzierbar? Geben Sie ∇f und ∇q an.
b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = (\frac{\pi}{2}, 0, 1)^T$ in Richtung von $(1, 1, 1)^T$.
c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von q an der Stelle $\vec{x}_0 = (0, 0, 1)^T$ in Richtung von $(1, 0, 0)^T$.

Aufgabe 29 (15 Punkte)
Wenn wir $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^T$ als vektorwertigen Differentialoperator betrachten, können wir auch Skalarprodukte und, im $\mathbb{R}^3$, das Kreuzprodukt bilden.
Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Für $\vec{f} : M \to \mathbb{R}^n$, $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), \ldots, f_n(\vec{x}))^T$ definieren wir

$$\mathrm{div}\vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \quad \text{(Divergenz)}$$

$$\text{und speziell für } n = 3 \quad \mathrm{rot}\,\vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{(Rotation).}$$

Berechnen Sie (wo möglich) $\mathrm{div}\vec{f}$, $\mathrm{rot}\vec{f}$, $\mathrm{grad}\,V$, $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,V$ und $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,V$ für

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - z\cos z \\ x \sin(yz) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,.$$

Aufgabe 30 [1] (5+3+2 = 10 Zusatzpunkte)

Sei $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten x, y, z. Wir möchten uns die folgende Menge veranschaulichen,

$$T := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = \tfrac{1}{4} \right\} .$$

a) Zeichnen Sie zunächst die Schnittmengen mit den drei Koordinatenebenen, z.B. ist $T_{xy} := \{\vec{x} \in T \mid z = 0\}$ die Schnittmenge mit der xy-Ebene.

b) Zeichnen Sie nun $T \subset \mathbb{R}^3$.

c) Erklären Sie kurz, wie Sie von den Ergebnissen in (a) zu der Zeichnung in (b) gelangt sind.

Hinweis: Wenn Sie in (a) die Gleichung, die ein Punkt erfüllen muss, damit er sowohl in T als auch in einer Koordinatenebene liegt, etwas umstellen, kommen stets Kreise zum Vorschein.

[1] In dieser Aufgabe üben wir nochmal das Visualisieren in mehreren Dimensionen. Um die Aufgabe nicht zu entwerten, wird zu ihr keine Lösung publiziert.