Universität Tübingen, Mathematisches Institut — Sommersemester 2020
Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 7 (Abgabe spätestens am 11.06.2020 – Vorsicht Feiertag!)

Aufgabe 31 (10 Punkte)

Berechnen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$, $j = 1,2,3$, für $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ und die Wege

a) $\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$,

b) $\mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ und

c) $\mathfrak{K}_3$: Die geradlinige Verbindung von $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ nach $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Geben Sie auch jeweils den Anfangs- und den Endpunkt des Integrationswegs an.
Ist $\vec{f}$ konservativ, d.h. gibt es ein $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{f} = \nabla F$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 32 (6 Zusatzpunkte)

Wir betrachten nochmal die Funktionen f und q aus Aufgabe 24 und 28. Berechnen Sie alle zweiten partiellen Ableitungen und geben Sie die Hesse-Matrizen $f''(\vec{x})$ und $q''(\vec{x})$ an.

Aufgabe 33 (3+4+3= 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x^2}}{1-y^2}$ um $(0,0)$.

b) Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x,y,z) = \sin(xz) - \cos(y) + xy(z-1)^{20}$ und $g(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^y - x}{1+x^2}$.

c) Bestimmen Sie die Taylorreihe um den Punkt $(0,-1,1)$ von

$$f(x,y,z) = z^3 - 3z^2 + x^2 + 4yx + 2y + z + 20\,.$$

Hinweis: Sie müssen nicht ableiten.

Aufgabe 34 (8+7 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktionen

$$f(x,y) = (x-y)^4 - 7(x^2+y^2) + 18xy \qquad \text{und} \qquad g(x,y) = y^2 - y^4 + \sin(x)\,,$$

d.h. alle Punkte mit $\nabla f = 0$ (bzw. $\nabla g = 0$). Untersuchen Sie, ob dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 35 (10 Zusatzpunkte)

Bestimmen Sie $\int_{\mathfrak{K}_j} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$, $j = 1, 2$, für

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} z\mathrm{e}^{xz} - 2x\cos(x^2+y^2) \\ \mathrm{e}^{-y^2} - 2y\cos(x^2+y^2) \\ x\mathrm{e}^{xz} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 2\pi\,,$$

$$\text{sowie} \quad \mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \\ \log(1+3t) \end{pmatrix}, \quad 0 \le t \le 1\,.$$

Zeichnen Sie außerdem $\mathfrak{K}_1$.