Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2020

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 9 (Abgabe am 25.06.2020)

Aufgabe 39 (10 Punkte)
Für welche $(r, \vartheta, \varphi) \in \mathbb{R}^3$ ist die Funktion

$$f(r,\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} x(r,\vartheta,\varphi) \\ y(r,\vartheta,\varphi) \\ z(r,\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar?[1] Berechnen Sie auch $f^{-1\prime}(-3,0,0)$; geben Sie an, welchen Zweig Sie dabei gewählt haben (d.h. aus welchem Bereich bei Ihnen r, ϑ und φ stammen).

Aufgabe 40 (15 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2-2x+4y}$.

a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.
b) Bestimmen Sie alle potentiellen Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 9$. Entscheiden Sie, ob es sich tatsächlich um Minima oder Maxima handelt.
c) Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 9\}$. Bestimmen Sie $\max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ und $\min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$.

Hinweis: Denken Sie neben dem Satz auf Anleitung 14 auch an Satz aus Anleitung 9.

Aufgabe 41 (10 Zusatzpunkte)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = x^2y^2$. Bestimmen Sie Minimum und Maximum von f auf $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Wo werden Minimum und Maximum angenommen?

Aufgabe 42 (10 Punkte)
Bestimmen Sie die Masse m des inhomogenen Einheitswürfels $W = [0,1]^3$ mit Dichte

$$f(x,y,z) = x^2y\,\mathrm{e}^{xyz} + z\,\mathrm{e}^{xz}\,,$$

d.h. berechnen Sie $m = \int_W f\,\mathrm{d}V$.

---

[1] Das heißt wo existiert eine Funktion $f^{-1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} r(x,y,z) \\ \vartheta(x,y,z) \\ \varphi(x,y,z) \end{pmatrix}$?