Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2020

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 10 (Abgabe 02.07.2020)

Aufgabe 44 (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumen $|E| = \int_E \mathrm{d}V$ des Ellipsoids

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}^+ .$$

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ positiv definit und $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \vec{x}, A\vec{x} \rangle \leq 1\}$. Bestimmen Sie $|K|$.
Hinweis: Laut des Satzes auf Anleitung 6 (HAT) existiert eine orthogonale Matrix U, so dass $U^T A U$ diagonal ist. Die Transformation $\vec{y} = U^T \vec{x}$ bietet sich also an.

Aufgabe 45 (Zylinderkoordinaten) (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Volumenelement $\mathrm{d}V$ in Zylinderkoordinaten (r, φ, z), definiert durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z: \text{ kartesisch}),$$

b) Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche des Paraboloids

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq z \leq 4 \right\}.$$

und zeichnen Sie P.

Aufgabe 46 (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Oberfläche des Sattels

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 4\,,\ z = x^2 - y^2 \right\}$$

sowie den Fluss von $\vec{v}(\vec{x}) = \vec{x}$ durch S ohne Verwendung eines Integralsatzes.
Hinweis: Ebene Polarkoordinaten, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$, sind hilfreich.

Aufgabe 47 (10 Zusatzpunkte)

Bestimmen Sie das Volumen des Torus[1]

$$T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + r\sin u)\cos v \\ (1 + r\sin u)\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix} \;,\; 0 \le r \le \tfrac{1}{2} \,,\; 0 \le u < 2\pi \,,\; 0 \le v < 2\pi \right\} \,,$$

d.h. berechnen Sie $\int_T \mathrm{d}V$. Bestimmen Sie auch seine Oberfläche, d.h. $\int_{\partial T} \mathrm{d}O$, wobei

$$\partial T = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + \frac{1}{2}\sin u)\cos v \\ (1 + \frac{1}{2}\sin u)\sin v \\ \frac{1}{2}\cos u \end{pmatrix} \;,\; 0 \le u < 2\pi \,,\; 0 \le v < 2\pi \right\} \,.$$

[1] vgl. Aufgabe 30. Um die Aufgabe nicht zu entwerten, wird zu ihr kein Lösungsvideo publiziert.