

Mathematik II für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 12 (Abgabe 16.07.2020)

Aufgabe 52 (Simpsons Paradoxon)

(15 Punkte)

Die folgende Tabelle nennt die Zahlen von Bewerber*innen und davon als Student*innen Zugelassenen für zwei verschiedene Studiengänge in Berkeley im Jahr 1973.¹

Studiengang	männlich		weiblich	
	Bewerber	Zugelassene	Bewerberinnen	Zugelassene
I	825	511	108	89
II	373	22	341	24

Wir wählen aus der Menge aller Bewerber*innen eine Person zufällig aus, wobei jede Person die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, ausgewählt zu werden. Betrachten Sie die folgenden Ereignisse:

W = Die Person ist weiblich.

$M = W^c$ = Die Person ist männlich.

I = Die Person hat sich für den Studiengang I beworben.

$II = I^c$ = Die Person hat sich für den Studiengang II beworben.

Z = Die Person wurde zum Studium zugelassen.

- a) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und interpretieren Sie diese in Worten. (Beispiel: $P(M|Z) = 0,8251$ bedeutet: "82,51% der Zugelassenen sind männlich.")

(i) $P(W)$ und $P(M)$.

(ii) $P(Z|W)$ und $P(Z|M)$.

Wer scheint bevorzugt zugelassen zu werden, Männer oder Frauen?

- b) Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten und interpretieren Sie diese in Worten.

(i) $P(Z|W \cap I)$ und $P(Z|M \cap I)$.

(ii) $P(Z|W \cap II)$ und $P(Z|M \cap II)$.

Wer scheint bevorzugt zugelassen zu werden, Männer oder Frauen?

- c) Berechnen Sie

(i) $P(Z|I)$ und $P(Z|II)$ sowie

(ii) $P(I|W)$ und $P(I|M)$,

und erklären Sie, wie sich der (scheinbare) Widerspruch zwischen (a) und (b) auflösen lässt.

¹P. Bickel, E. A. Hammel, J. W. O'Connell, *Sex bias in graduate admissions: Data from Berkeley*, Science **187** (1975) 398–404.

Aufgabe 53

(10 Punkte)

In einer medizinischen Pilotstudie sprachen 6 von 17 Patienten auf eine *neue* Behandlung an. Sei $w \in [0, 1]$ die (wahre, unbekannte) Ansprechwahrscheinlichkeit auf die *neue* Behandlung. Die Ansprechwahrscheinlichkeit auf die *alte Standardbehandlung* wird mit 15% angegeben. Testen Sie die Nullhypothese $w = 0,15$ gegen die Alternative $w > 0,15$ auf dem 5%-Niveau.

Ist die Verbesserung durch die neue Behandlung laut diesem Test signifikant?

HINWEIS: Für $X \sim \text{Bin}(17, 15\%)$ gilt:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	≥ 8
$F_X(k)$	0.063	0.252	0.520	0.756	0.901	0.968	0.992	0.998	1.00

Aufgabe 54

(10 Zusatzpunkte)

Das Pharmaunternehmen ANTIQUARTIS preist das neue Mittel PASTOFEBRIL gegen Weidefieber bei Kühen an. Ein Landwirt probierte dieses Mittel an seiner Kuh Thekla aus, die an Weidefieber erkrankt war. Daraufhin wurde Thekla gesund. Nun ist auch die Kuh Elsa an Weidefieber erkrankt.

Geben Sie aufgrund der Beobachtung an Thekla ein 95%-Vertrauensintervall für die Wahrscheinlichkeit w an, dass auch Elsa gesund wird, wenn sie mit PASTOFEBRIL behandelt wird. Testen Sie dazu einseitig $H_0 : w = w_0$ gegen $H_A : w > w_0$ und erinnern Sie sich daran, dass das Vertrauensintervall aus denjenigen w_0 besteht, für die H_0 nicht verworfen werden kann. (Die Alternative H_A entspricht der Behauptung von ANTIQUARTIS und der Hoffnung des Landwirtes, dass PASTOFEBRIL tatsächlich wirkt.)

Aufgabe 55

(10 Zusatzpunkte)

Lesen Sie den nebenstehenden Comic. Nehmen Sie an, dass Jelly Beans keine Akne verursachen – und zwar unabhängig von der Farbe. Nehmen Sie weiter an, dass bei den fabspezifischen Tests, die Wahrscheinlichkeit, eine wahre Nullhypothese zu verwerfen, jeweils 5% betrug. (Warum?)

Wie groß ist Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens eine der zwanzig (wahren) Nullhypothesen verworfen wird? Welche Konsequenzen hat diese Beobachtung für den Umgang mit p-Werten und Hypothesentests im Wissenschaftsalltag?



xkcd.com/882