Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2020

Mathematik II für Naturwissenschaftler∗innen

Klausur am 28.07.2020

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 97 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+4+8 = 16 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\,\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x^3\,\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ Hinweis: Partielle Integration

c) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{3x+1}{x^3+x^2}\,\mathrm{d}x$ Hinweis: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $y'\,y - \cos x = 1,\ y(0) = -\sqrt{2}$.

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y'' + 2y' + y = 0$.
b) Lösen Sie das AWP $y'' + 2y' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$.
c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 2y' + y = \mathrm{e}^{-x}$.

Aufgabe 4 (8+2+3 = 13 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
b) Führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine orthogonale Matrix U und eine Diagonalmatrix D an, so dass $D = U^T A U$.
c) Bestimmen Sie $A^{10}\vec{x}$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)
Bringen Sie die quadratische Form in

$$10xy - 4(x^2 + y^2) = 1$$

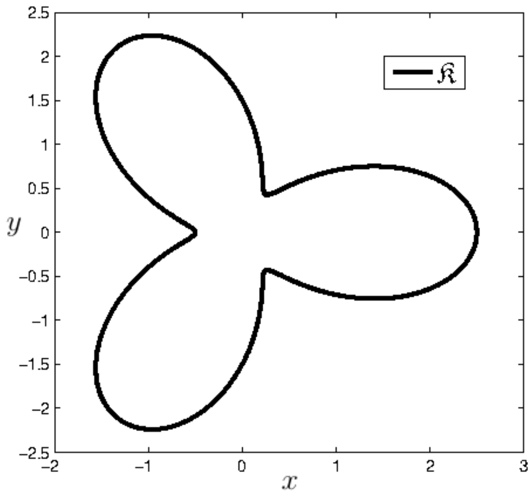
auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn (in einem xy-Koordinatensystem).

Aufgabe 6 (10+4 = 14 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + y^2 - \dfrac{y^3}{3} - xy$.

a) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = (0,0)$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

b) Geben Sie die Taylorentwicklung von f um $(1,1)$ bis einschließlich der quadratischen Terme an.



Aufgabe 7 (8 Punkte)

Berechnen Sie den Inhalt der von der Kurve

$$\mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{3}{2} + \cos(3t))\cos t \\ (\frac{3}{2} + \cos(3t))\sin t \end{pmatrix},$$

$$0 \le t < 2\pi\,,$$

eingeschlossenen Fläche.

Hinweis: Polarkoordinaten sind hilfreich, und Sie dürfen $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \pi$ verwenden.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Bestimmen Sie den Fluss (von innen nach außen) des Vektorfelds

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y - z \\ z + x \\ x^2 + z^3 \end{pmatrix}$$

durch die Oberfläche $\partial K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| |\vec{x}| = 1 \right\}$ der Einheitskugel $K = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \middle| |\vec{x}| \le 1 \right\}$, d.h. bestimmen Sie $\displaystyle\oiint_{\partial K} \vec{v}\,\vec{n}_{\mathrm{a}}\,\mathrm{d}O$.

Hinweis: Ein Integralsatz ist hilfreich.

Aufgabe 9 (1+3+1+2+3 = 10 Punkte)

Zwei Personen leiden an einer neuartigen Viruserkrankung. Beide werden mit einem noch nicht zugelassenen Medikament behandelt. Beide werden wieder gesund. Wir möchten auf der Basis dieser Beobachtung Aussagen über die Wahrscheinlichkeit w treffen, mit der eine erkrankte und mit diesem Medikament behandelte Person wieder gesund wird. Dazu testen wir die Nullhypothese $H_0 : w = w_0$ gegen die Alternativhypothese $H_A : w > w_0$.

a) Beschreiben Sie in einem Satz die Teststatistik X.

b) Wie ist X unter H_0 verteilt?

c) Welcher Wert von X wurde beobachtet?

d) Berechnen Sie den p-Wert des Tests.

e) Bestimmen Sie, im Sinne dieses Tests, das 99%-Vertrauensintervall für die Heilungswahrscheinlichkeit w.